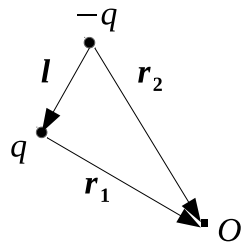
ΘΕΜΑ 1ο (25%). Θεωρήστε δύο σημειακά φορτία q και $-q$ που βρίσκονται σε απόσταση l. Γράψτε το δυναμικό στο σημείο O που απέχει r_1 και r_2 από τα φορτία q και $-q$ αντίστοιχα. Θεωρώντας το $l << r_{1,2}$, δείξτε ότι σε πρώτη τάξη προσέγγισης το δυναμικό στο O παίρνε τη μορφή του δυναμικού διπόλου $V_O = (1/(4\pi\epsilon_0))\,(\vec{p}\cdot\vec{r})/r^3$, όπου $\vec{r} \sim \vec{r}_{1,2}$ και $\vec{p} = q\vec{l}$. Γράψτε επίσης το ηλεκτρικό πεδίο στο O για το σύστημα των δύο φορτίων και δείξτε ότι καταλήγει στο ηλεκτρικό πεδίο διπόλου $\vec{E}_0 = (1/(4\pi\epsilon_0))(-\vec{p}/r^3 + 3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}/r^5)$
(Υπενθυμίζουμε ότι το πεδίο σημειακού φορτίου μπορεί να γραφεί ως $\vec{E}_0 = (1/(4\pi\epsilon_0))(q/r^2)\hat{\vec{r}} = (1/(4\pi\epsilon_0))(q\vec{r}/r^3)$)



ΛΥΣΗ
Το δυναμικό στο O από τα φορτία είναι

$$V_O = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Γράφοντας

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{l} \Rightarrow r_2 = \left(\left(\vec{r}_1 + \vec{l}\right)^2\right)^{1/2} = \left(r_1^2 + l^2 + 2\vec{r}_1\cdot\vec{l}\right)^{1/2} = r_1\left(1 + \frac{2\vec{r}_1\cdot\vec{l}}{r_1^2} + \frac{l^2}{r_1^2}\right)^{1/2}$$

και αναπτύσσοντας για μικρό l/r_1

$$r_2 = r_1\left(1 + \frac{1}{2}\frac{2\vec{r}_1\cdot\vec{l}}{r_1^2} + \frac{1}{2}\frac{l^2}{r_1^2}\right)$$

Τώρα, η παρένθεση στο δυναμικό γράφεται

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_1}\left(1 - \left(1 + \frac{1}{2}\frac{2\vec{r}_1\cdot\vec{l}}{r_1^2} + \frac{1}{2}\frac{l^2}{r_1^2}\right)^{-1}\right) =$$
$$= \frac{1}{r_1}\left(1 - 1 + \frac{\vec{r}_1\cdot\vec{l}}{r_1^2} + ...\right) = \frac{\vec{r}_1\cdot\vec{l}}{r_1^3}$$

όπου και πάλι αναπτύξαμε την εσωτερική παρένθεση και κρατήσαμε μόνο όρους πρώτης δύναμης στο l/r_1. Και τελικά ($\vec{p} = q\vec{l}$)

$$V_O = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,q\,\frac{\vec{r}_1\cdot\vec{l}}{r_1^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}_1\cdot\vec{p}}{r_1^3}$$

Για το ηλεκτρικό πεδίο ακολουθούμε την ίδια διαδικασία

$$\vec{E}_O = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\vec{r}_1}{r_1^3} - \frac{\vec{r}_2}{r_2^3}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\vec{r}_1}{r_1^3} - \frac{\vec{r}_1 + \vec{l}}{\left(r_1^2 + l^2 + 2\vec{r}_1\cdot\vec{l}\right)^{3/2}}\right)$$

Όπως και πριν

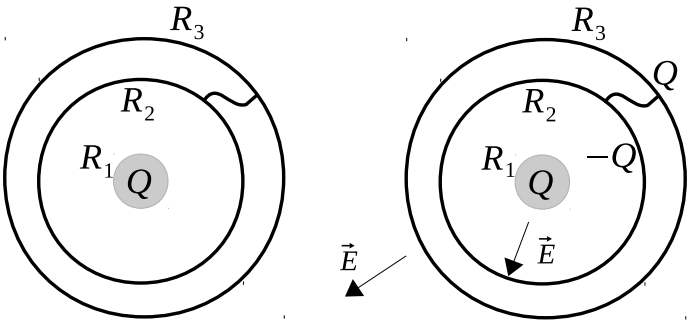
$$\frac{\vec{r}_1}{r_1^3} - \frac{\vec{r}_1 + \vec{l}}{\left(r_1^2 + l^2 + 2\vec{r}_1 \cdot \vec{l}\right)^{3/2}} = \frac{1}{r_1^3}\left(\vec{r}_1 - \frac{\vec{r}_1 + \vec{l}}{\left(1 + \frac{3}{2}\,\frac{2\vec{r}_1 \cdot \vec{l}}{r_1^2} + \frac{3}{2}\,\frac{l^2}{r_1^2}\right)}\right) =$$

$$= \frac{1}{r_1^3}\left(\vec{r}_1 - (\vec{r}_1 + \vec{l})\left(1 - 3\frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{l}}{r_1^2}\right)\right) = \frac{1}{r_1^3}\left(-\vec{l} + 3\frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{l}}{r_1^2}\,\vec{r}_1\right)$$

Επομένως

$$\vec{E}_O = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{\vec{l}}{r_1^3} + 3\frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{l}}{r_1^5}\,\vec{r}_1\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{\vec{p}}{r_1^3} + 3\frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{p}}{r_1^5}\,\vec{r}_1\right)$$

ΘΕΜΑ 2ο (25%). Αγώγιμη σφαίρα ακτίνας R_1 φέρει φορτίο Q και περιβάλλεται από δύο ομόκεντρους λεπτούς αφόρτιστους αγώγιμους φλοιούς ακτίνας R_2 και R_3 ($R_1 < R_2 < R_3$). Οι δύο φλοιοί είναι συνδεδεμένοι με ένα λεπτό αγώγιμο σύρμα (αμελητέας χωρητικότητας.) Βρείτε το δυναμικό της εσωτερικής σφαίρας ως προς το άπειρο.



Λύση

Το πεδίο για $r < R_1$ είναι μηδενικό, μιας και η σφαίρα είναι αγώγιμη. Στο χώρο ανάμεσα στους φλοιούς το ηλεκτρικό πεδίο είναι πάλι μηδενικό. Ο λόγος είναι ότι, λόγω του αγώγιμου σύρματος, το σύστημα των δύο φλοιών συμπεριφέρεται ως ένα αγώγιμο κέλυφος Στο εσωτερικό αγώγιμου κελύφους, αν δεν υπάρχουν φορτία, το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδενικό. Μια πιό αυστηρή εξήγηση είναι ότι η συνάρτηση δυναμικού στο συγκεκριμένο χώρο πρέπει να υπακούει την εξίσωση Laplace και πάνω στους αγώγιμους φλοιούς να έχει σταθερή τιμή, το κοινό δυναμικό των φλοιών. Μία λύση, άρα και η μοναδική, είναι ότι η συνάρτηση δυναμικού έχει τη σταθερή τιμή του δυναμικού των φλοιών. Και επομένως, το ηλεκτρικό πεδίο που είναι η βαθμίδα του δυναμικού θα είναι μηδέν. Επομένως, αν πάρουμε σφαιρική επιφάνεια Gauss με ακτίνα $R_2 < r < R_3$, η ροή από αυτήν την επιφάνεια θα είναι μηδέν, μιας και το $\vec{E}$ είναι μηδέν, Επομένως, το περικλυόμενο φορτίο σ' αυτήν την επιφάνεια, δηλαδή το φορτίο Q και το φορτίο του εσωτερικού φλοιού, θα πρέπει να είναι μηδέν. Επειδή το σύστημα των φλοιών είναι αφόρτιστο στον εξωτερικό φλοιό θα εμφανιστεί φορτίο Q.
Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας το πεδίο στο χώρο $R_1 < r < R_2$ αλλά και στο χώρο $r > R_3$, από το νόμο του Gauss, επιλέγοντας σφαιρική επιφάνεια κατάλληλης ακτίνας r σε κάθε μια από τις δύο περιοχές,

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{Q_S}{\epsilon_0} \Rightarrow \oint_S E\, ds = \frac{Q_S}{\epsilon_0} \Rightarrow E 4\pi r^2 = \frac{Q_S}{\epsilon_0}$$

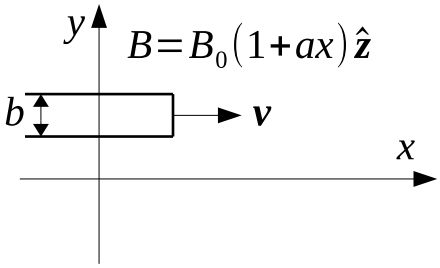
θα δίνεται από τη σχέση

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{\hat{r}} \qquad \text{για } R_1 < r < R_2 \text{ και } r > R_3$$

μιας και σε κάθε μια από τις δύο περιπτώσεις το περικλυόμενο φορτίο είναι Q.
Το δυναμικό της σφαίρας ως προς το άπειρο θα είναι

$$\begin{aligned} V &= -\int_\infty^{R_1} \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\int_\infty^{R_1} E\, dr = -\int_\infty^{R_3} E\, dr - \int_{R_2}^{R_1} E\, dr \\ &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_\infty^{R_3} \frac{dr}{r^2} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_2}^{R_1} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 3ο (25%). Μακρύ ορθογώνιο αγώγιμο πλαίσιο πλάτους b κινείται στο επίπεδο (xy) παράλληλα με τον άξονα των x και εισέρχεται στην περιοχή με $x > 0$ όπου επικρατεί μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B_0(1+ax)\vec{\hat{z}}$, με $a(>0)$ και B_0 γνωστές σταθερές. Ποια θα πρέπει να είναι η ταχύτητα του πλαισίου, **ως συνάρτηση του** x, ώστε η αναπτυσσόμενη τάση εξ επαγωγής στο πλαίσιο να παραμένει σταθερή και ίση με E_0.



Λύση

Το μαγνητικό πεδίο είναι κάθετο στην επιφάνεια του πλαισίου, οπότε η ροή από το πλαίσιο είναι (στοιχειώδες εμβαδόν bdx)

$$\Phi = \int_0^x B(x)da = \int_0^x B_0(1+ax)bdx = B_0 b\left(x + \frac{1}{2}ax^2\right)$$

Η αναπτυσσόμενη **τάση** εξ επαγωγής είναι ίση με την χρονική παράγωγο της ροής. Οπότε απαιτούμε

$$\frac{d\Phi}{dt} = E_0$$

αγνοώντας την φορά της αναπτυσσόμενης τάσης. Οπότε

$$E_0 = B_0 b\frac{d}{dt}(1+\frac{1}{2}ax)x = B_0 b\left(\frac{dx}{dt} + ax\frac{dx}{dt}\right) = B_0 b(1+ax)v \Rightarrow$$
$$v = \frac{E_0}{B_0 b(1+ax)}$$

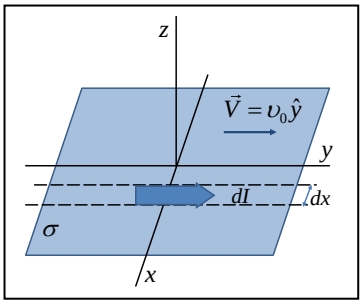
Άλλος τρόπος

Η τάση εξ επαγωγής αναπτύσσεται στο τμήμα b του πλαισίου που είναι μέσα στο μαγνητικό πεδίο. Από το γνωστό τύπο Blv που δίνει την **τάση** στα άκρα αγώγιμης ράβδου που κινείται κάθετα στο μαγνητικό πεδίο με ταχύτητα v, για την περίπτωσή μας παίρνουμε

$$E = Bbv = B_0(1+ax)lv$$

Απαιτώντας αυτή η **τάση** να είναι E_0, παίρνουμε

$$v = \frac{E_0}{B_0 b(1+ax)}$$



Θέμα 4 (30%). Επίπεδη επιφάνεια «άπειρης» έκτασης, (που συμπίπτει με το επίπεδο x-y), φέρει κατανεμημένο ομοιόμορφα φορτίο με επιφανειακή πυκνότητα $dQ/dS=\sigma=\sigma\tau\alpha\theta.>0$, και κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{V}=\upsilon_0\hat{y}$.

(α) Υπολογίστε την **επιφανειακή** πυκνότητα ρεύματος $J=dI/dx$ του συστήματος.

(β) Να υπολογίσετε την ένταση του Ηλεκτροστατικού (Η/Σ) και του Μαγνητοστατικού (Μ/Σ) πεδίου σε κάθε σημείο του χώρου, (χρησιμοποιώντας κατάλληλα το Νόμο του Gauss και τον Νόμο του Ampere), και να υπολογίσετε και το λόγο των πυκνοτήτων ενέργειας Η/Σ και Μ/Σ πεδίου.

(γ) Να υπολογίσετε την δύναμη που ασκεί το σύστημα σε σημειακό φορτίο Q>0, όταν αυτό κινείται με ταχύτητα μέτρου υ_1 παράλληλα στον άξονα–x, ή άξονα–y, ή άξονα–z, αντίστοιχα.

(δ) Εξετάστε αν υπάρχει η δυνατότητα, με κατάλληλη επιλογή ταχύτητας (φορά και μέτρο) για το φορτίο Q, αυτό να κινείται ισοταχώς, και σχολιάστε την απάντησή σας, σε σχέση με τον λόγο των πυκνοτήτων ενέργειας του ερωτήματος (β).

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) $$J\equiv\frac{\Delta I}{\Delta x}=\frac{\Delta Q}{\Delta t\Delta x}=\frac{\sigma\Delta x\Delta y}{\Delta t\Delta x}=\sigma\frac{\Delta y}{\Delta t}=\sigma\upsilon_0,$$

(β) Νόμος Gauss: $\vec{E}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z}$, Νόμος Ampere: $\vec{B}=\frac{\mu_0}{2}J\hat{x}=\frac{\mu_0}{2}\sigma\upsilon_0\hat{x}$,

Πυκνότητες Ενέργειας

$$\rho_{W_E}=\frac{\varepsilon_0}{2}\left|\vec{E}\right|^2=\frac{\varepsilon_0}{2}\left|\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right|^2\Rightarrow\rho_{W_E}=\frac{\sigma^2}{8\varepsilon_0},\qquad \rho_{W_B}=\frac{1}{2\mu_0}\left|\vec{B}\right|^2=\frac{1}{2\mu_0}\left|\frac{\mu_0}{2}\sigma\upsilon_0\right|^2\Rightarrow\rho_{W_B}=\mu_0\frac{\sigma^2\upsilon_0^2}{8}$$

$$\frac{\rho_{W_E}}{\rho_{W_B}}=\frac{\sigma^2}{8\varepsilon_0}\frac{8}{\mu_0\sigma^2\upsilon_0^2}\Rightarrow\boxed{\frac{\rho_{W_E}}{\rho_{W_B}}=\left(\frac{c}{\upsilon_0}\right)^2},\qquad [\text{ΕΚΤΟΣ: } S=\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}=\frac{1}{\mu_0}\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{\mu_0}{2}\sigma\upsilon_0\hat{y}=\frac{\sigma^2\upsilon_0\hat{y}}{4\varepsilon_0}]$$

Το Η/Σ πεδίο αντιστοιχεί σε πολύ μεγαλύτερη πυκνότητα ενέργειας

(γ) Υπολογισμός δυνάμεων

$$\vec{F}\left(Q,\upsilon_1\hat{x}\right)=-Q\left(\vec{E}+\vec{\upsilon}_1\times\vec{B}\right)=-Q\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z}+\upsilon_1\hat{x}\times\frac{\mu_0}{2}\sigma\upsilon_0\hat{x}\right)=-\frac{Q\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z}$$

$$\vec{F}\left(Q,\upsilon_1\hat{y}\right)=-Q\left(\vec{E}+\vec{\upsilon}_1\times\vec{B}\right)=-Q\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z}+\upsilon_1\hat{y}\times\frac{\mu_0}{2}\sigma\upsilon_0\hat{x}\right)=-Q\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z}-\upsilon_1\frac{\mu_0}{2}\sigma\upsilon_0\hat{z}\right)$$

$$\vec{F}\left(Q,\upsilon_1\hat{z}\right)=-Q\left(\vec{E}+\vec{\upsilon}_1\times\vec{B}\right)=-Q\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z}+\upsilon_1\hat{z}\times\frac{\mu_0}{2}\sigma\upsilon_0\hat{x}\right)=-Q\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z}-\upsilon_1\frac{\mu_0}{2}\sigma\upsilon_0\hat{y}\right)$$

(δ) Το μόνο ενδεχόμενο μηδενισμού της συνολικής δύναμης είναι:

$$\vec{F}\left(Q,\upsilon_1\hat{y}\right)=-Q\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}-\upsilon_1\frac{\mu_0}{2}\sigma\upsilon_0\right)\hat{z}=0\Rightarrow\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}=\upsilon_1\frac{\mu_0}{2}\sigma\upsilon_0,\ \text{δηλαδή}$$

Άρα: $$\upsilon_1=\frac{1}{\upsilon_0\varepsilon_0\mu_0}\Rightarrow\upsilon_1=\frac{c^2}{\upsilon_0}\Rightarrow\boxed{\upsilon_1=c\frac{c}{\upsilon_0}>c}\ :\ \text{αδύνατον!}$$

Ή, οριακά επιτεύξιμο μόνο αν $\upsilon_0=c$ οπότε θα πρέπει και: $\upsilon_1=c$!

Άλλωστε, για να έχουν τα δύο πεδία την ίδια πυκνότητα ενέργειας θα πρέπει $\upsilon_0=c$!