ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Εξετάσεις στη Μαθηματική Ανάλυση Ι
ΟΜΑΔΑ: Β

17 Φεβρουαρίου, 2017

Θ1. (α′) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση την ακολουθία $a_n = \sqrt[n]{1+n+n^2+\cdots+n^{999}}$. (0,5 μον.)

(β′) Έστω (a_n), (b_n) ακολουθίες πραγματικών αριθμών με $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ και $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ όπου $a, b \in \mathbb{R}$. Αν $a < b$ δείξτε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $a_n < b_m$ για όλα τα $n, m \geq n_0$. (0,5 μον.)

(γ′) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και κάτω φραγμένο σύνολο και έστω $a \in \mathbb{R}$ κάτω φράγμα του A. Δείξτε ότι $a = \inf A$ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία (a_n) με $a_n \in A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ που συγκλίνει στο a. (1 μον.)

Λύση.

(α′) Έχουμε

$$n^{999} \leq 1+n+n^2+\cdots+n^{999} \leq 1000 \cdot n^{999} \Leftrightarrow \sqrt[n]{n^{999}} \leq a_n \leq \sqrt[n]{1000 \cdot n^{999}}$$
$$\Leftrightarrow (\sqrt[n]{n})^{999} \leq a_n \leq \sqrt[n]{1000} \cdot (\sqrt[n]{n})^{999}$$

Επειδή $\sqrt[n]{1000} \to 1$ και $\sqrt[n]{n} \to 1 \Rightarrow (\sqrt[n]{n})^{999} \to 1$, απο το θεώρημα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών παίρνουμε ότι $a_n \to 1$.

(β′) Έστω $a < b$. Θέτουμε $\epsilon = \frac{b-a}{2}$. Αφού η (a_n) συγκλίνει στο a υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ με $|a_n - a| < \epsilon$ για όλα τα $n \geq n_1$. Ομοίως αφού η (b_n) συγκλίνει στο b υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ με $|b_n - b| < \epsilon$ για όλα τα $n \geq n_2$. Ισχυριζόμαστε ότι ο $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ ικανοποιεί το ζητούμενο. Πράγματι, έστω $n, m \geq n_0$. Τότε $n \geq n_1$ και άρα $|a_n - a| < \epsilon$. Ειδικότερα,

$$a_n < a + \epsilon = \frac{a+b}{2} \tag{1}$$

Ομοίως $m \geq n_0 \geq n_2$ και άρα $|b_m - b| < \epsilon$, οποτε

$$b_m > b - \epsilon = \frac{a+b}{2} \tag{2}$$

Από τις (1), (2), προκύπτει ότι $a_n < \frac{a+b}{2} < b_m$ και άρα $a_n < b_m$.

(γ′) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και κάτω φραγμένο σύνολο και $a \in \mathbb{R}$ κάτω φράγμα του A. Έστω ότι $a = \inf A$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ επιλέγουμε $a_n \in A$ με $a_n < a + \dfrac{1}{n}$. Η επιλογή αυτή μπορεί να γίνει διότι αφού το $a + 1/n$ είναι γνήσια μεγαλύτερο απο το $a = \inf A$, το $a + \dfrac{1}{n}$ δεν είναι κάτω φράγμα του A οπότε υπάρχει στοιχείο του A γνήσια μικρότερό του. Ισχυριζόμαστε ότι η ακολουθία (a_n) συγκλίνει στο a. Πράγματι, απο την επιλογή της (a_n) έχουμε $a_n < a + \dfrac{1}{n}$. Απο την άλλη μεριά $a \leq a_n$ αφού $a_n \in A$ και $a = \inf A$. Συνεπώς $a \leq a_n < a + \dfrac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και απο το θεώρημα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών παίρνουμε ότι $a_n \to a$.

Αντίστροφα, έστω ότι υπάρχει ακολουθία (a_n) με $a_n \in A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ που συγκλίνει στο a. Από υπόθεση το a είναι κάτω φράγμα του A και συνεπώς $a \leq \inf A$. Αρκεί συνεπώς να αποκλείσουμε την περίπτωση $a < \inf A$. Πράγματι αν αυτό ισχύει τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θα είχαμε $a < \inf A \leq a_n$, αφού $a_n \in A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θέτοντας $\epsilon = \inf A - a$, έχουμε $\epsilon > 0$ και $a + \epsilon = \inf A \leq a_n$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Όμως $a_n \to a$ και άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $a_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$ για όλα τα $n \geq n_0$. Ειδικότερα, $a_{n_0} < a + \epsilon$, άτοπο.

■

Θ2. (α′) Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με $a_n > 0$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$. Αν υπάρχει $0 < \lambda < 1$ με $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \lambda$, για κάθε $n = 1, 2, \ldots$, δείξτε τα εξής: (i) $a_n \leq a_1 \lambda^{n-1}$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ και (ii) η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. (0,5 μον.)

(β′) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{1}{n}\right)$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ και $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\left(\ln(n+8)\right)^2\right.}{n+8}$. (1,5 μον.)

Λύση.

(α′) (i) Για $n = 1$ έχουμε $a_1 \leq a_1 \lambda^0 = a_1$ και συνεπώς η σχέση $a_n \leq a_1 \lambda^{n-1}$ ισχύει τετριμμένα για $n = 1$. Έστω ότι $a_n \leq a_1 \lambda^{n-1}$ για κάποιο $n \geq 1$. Η σχέση $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \lambda$ δίνει ότι $a_{n+1} \leq a_n \lambda$ (αφού $a_n > 0$). Απο επαγωγική υπόθεση $a_n \leq a_1 \lambda^{n-1}$ και άρα $a_{n+1} \leq a_n \lambda \leq a_1 \lambda^{n-1} \lambda = a_1 \lambda^n$. Συνεπώς με επαγωγή έχουμε ότι $a_n \leq a_1 \lambda^{n-1}$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$.
(ii) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \lambda^{n-1} = a_1 + a_1 \lambda + a_1 \lambda^2 + \ldots$ είναι η γεωμετρική σειρά με λόγο $0 < \lambda < 1$ και συνεπώς συγκλίνει (στο $\dfrac{a_1}{1-\lambda}$). Απο το (i) και το κριτήριο σύγκρισης έπεται ότι και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(β′) Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{1}{n}\right)$ έχει θετικούς όρους. Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο ορίου λόγου συγκρίνοντας με την $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ που ως γνωστόν συγκλίνει. Επειδή

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \left(\frac{\sin x - \sin 0}{x - 0}\right)^2 = \left(\sin'(0)\right)^2 = \cos^2 0 = 1$$

έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}} = 1$$

και άρα από κριτήριο ορίου λόγου έχουμε ότι η σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sin^2\left(\frac{1}{n}\right)$ συγκλίνει.

Για τη σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{3^n n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} > 1$$

και άρα η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ δεν συγκλίνει.

Για τη σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln(n+8))^2}{n+8}$ θα εφαρμόσουμε το ολοκληρωτικό κριτήριο. Θέτουμε $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \dfrac{(\ln(x+8))^2}{x+8}$. Εύκολα βλέπουμε ότι $f \geq 0$ (ως πηλίκο θετικών) και f συνεχής (ως πηλίκο συνεχών). Επίσης η f είναι φθίνουσα αφού

$$f'(x) = \frac{2\ln(x+8) \cdot \frac{1}{x+8} \cdot (x+8) - (\ln(x+8))^2 \cdot 1}{(x+8)^2} = \frac{\ln(x+8) \cdot (2 - \ln(x+8))}{(x+8)^2} < 0$$

επειδή αν $x \geq 1$, $\ln(x+8) \geq \ln 9 > 2$.
Έχουμε

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^n \frac{(\ln(x+8))^2}{x+8}\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_{\ln 9}^{\ln(n+8)} y^2 dy = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+8)^3 - (\ln 9)^3}{3} = +\infty$$

και άρα η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln(n+8))^2}{n+2}$ δεν συγκλίνει.

■

Θ3. Έστω $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $\lim_{x\to\infty} f'(x) = \lambda \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ με $g(x) := f(x) - \lambda x$.

(α′) Δείξτε ότι

$$\forall\, \varepsilon > 0 \text{ υπάρχει } \delta > 0 \text{ τέτοιο ώστε } \quad \forall x > \delta \Rightarrow |g'(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\,. \qquad (*)$$

(0,5 μον.)

(β′) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα μέσης τιμής για τη συνάρτηση g στο διάστημα $[\delta, x]$, δείξτε ότι

$$\forall x > \delta \Rightarrow \left|\frac{g(x)}{x}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|g(\delta)|}{x}\,.$$

(1,2 μον.)

(γ′) Δείξτε ότι υπάρχει $\delta_1 \geq \delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\forall x > \delta_1 \Rightarrow \left|\frac{g(x)}{x}\right| < \varepsilon\,.$$

Να συμπεράνετε ότι $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda$. (0,5 μον.)

(δ′) Έστω $\varphi(x) = x + 2\sin x$, $x \in \mathbb{R}$. Υπολογίστε το όριο $\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{x}$ και εξετάστε αν $\lim_{x\to\infty} \varphi'(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{x}$. (0,8 μον.)

Λύση.

(α′) Επειδή $g'(x) := f'(x) - \lambda$, για κάθε $x > 0$, από την υπόθεση είναι $\lim_{x\to\infty} g'(x) = 0$ και επομένως

$$\forall\, \varepsilon > 0 \text{ υπάρχει } \delta > 0 \text{ τέτοιο ώστε } \quad \forall x > \delta \Rightarrow |g'(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\,. \qquad (*)$$

(β′) Από το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (\delta,\, x)$ τέτοιο ώστε $g(x) - g(\delta) = g'(\xi)(x-\delta)$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{g(x)}{x}\right| &= \left|\frac{(g(x) - g(\delta)) + g(\delta)}{x}\right| \\
&\leq \left|\frac{g(x) - g(\delta)}{x}\right| + \left|\frac{g(\delta)}{x}\right| \\
&= \frac{x-\delta}{x}|g'(\xi)| + \frac{|g(\delta)|}{x} \\
&\leq |g'(\xi)| + \frac{|g(\delta)|}{x} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|g(\delta)|}{x}\,. \qquad \text{(από την } (*))
\end{aligned}$$

(γ′) Επειδή $\lim_{x\to\infty} \frac{|g(\delta)|}{x} = 0$, υπάρχει $\delta_1 \geq \delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\forall x > \delta_1 \Rightarrow \frac{|g(\delta)|}{x} < \frac{\varepsilon}{2}$$

και επομένως

$$\forall x > \delta_1 \Rightarrow \left|\frac{g(x)}{x}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Άρα, $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$ και ισοδύναμα $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda$.

(δ′) Είναι $\frac{\varphi(x)}{x} = 1 + 2\frac{\sin x}{x}$, $x \neq 0$. Όμως $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ και επομένως $\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = 1$. Επειδή $\varphi'(x) = 1+2\cos x$ και ως γνωστόν το όριο $\lim_{x\to\infty} \cos x$ δεν υπάρχει, τότε και το όριο $\lim_{x\to\infty} \varphi'(x)$ δεν υπάρχει. Παρατηρούμε λοιπόν ότι το όριο $\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{x}$ υπάρχει και ισούται με 1 ενώ το όριο $\lim_{x\to\infty} \varphi'(x)$ δεν υπάρχει. Επομένως, $\lim_{x\to\infty} \varphi'(x) \neq \lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{x}$.

■

Θ4. Χρησιμοποιώντας τον τύπο Taylor για τη συνάρτηση $f(x) = \arctan x$ μέχρι τον όρο δεύτερης τάξης και κέντρο το $x_0 = -1$, δείξτε ότι για κάθε $x \leq 0$

$$\frac{1}{2}(x+1) \leq \arctan x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{2}(x+1)^2\,.$$

(1,5 μον.)

Λύση. Από τον τύπο Taylor με κέντρο το $x_0 = -1$ έχουμε

$$f(x) = f(-1) + f'(-1)(x+1) + \frac{f''(\xi_x)}{2!}(x+1)^2\,,$$

για κάποιο ξ_x μεταξύ -1 και x. Επειδή $\arctan(-1) = -\pi/4$,

$$(\arctan x)'|_{x=-1} = \left.\frac{1}{1+x^2}\right|_{x=-1} = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad (\arctan x)''|_{x=\xi_x} = -\left.\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right|_{x=\xi_x} = -\frac{2\xi_x}{(1+\xi_x^2)^2}\,,$$

είναι

$$\arctan x = -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x+1) - \frac{\xi_x}{(1+\xi_x^2)^2}(x+1)^2$$

και ισοδύναμα

$$\arctan x + \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}(x+1) - \frac{\xi_x}{(1+\xi_x^2)^2}(x+1)^2\,,$$

για κάποιο ξ_x μεταξύ -1 και x. Επειδή για κάθε $x \leq 0$ είναι $\xi_x < 0$, από την παραπάνω ισότητα προκύπτει ότι

$$\arctan x + \frac{\pi}{4} \geq \frac{1}{2}(x+1)$$

και

$$\left|\arctan x + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x+1)\right| = \frac{|\xi_x|}{(1+\xi_x^2)^2}(x+1)^2 = \frac{-\xi_x}{(1+\xi_x^2)^2}(x+1)^2 \leq \frac{1}{2}(x+1)^2\,. \qquad \left(\tfrac{-2\xi_x}{1+\xi_x^2} < 1\right)$$

Επομένως,

$$\arctan x + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x+1) \leq \frac{1}{2}(x+1)^2 \Leftrightarrow \arctan x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{2}(x+1)^2$$

και άρα

$$\frac{1}{2}(x+1) \leq \arctan x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{2}(x+1)^2\,.$$

■

Θ5. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k+4n}{\sqrt{3n^2-2kn-k^2}} = \int_0^1 \frac{x+4}{\sqrt{3-2x-x^2}}\, dx = \pi + \sqrt{3}\,.$$

(1,5 μον.)

Λύση. Από τη θεωρία του ολοκληρώματος Riemann είναι

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k+4n}{\sqrt{3n^2-2kn-k^2}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(k/n)+4}{\sqrt{3-2(k/n)-(k/n)^2}} \\ &= \int_0^1 \frac{x+4}{\sqrt{3-2x-x^2}}\, dx\,,\end{aligned}$$

όπου η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+4}{\sqrt{3-2x-x^2}}$ είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[0,1]$. Έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x+4}{\sqrt{3-2x-x^2}}\, dx &= \int_0^1 \frac{x+4}{\sqrt{4-(x+1)^2}}\, dx \\ &= \int_1^2 \frac{t+3}{\sqrt{4-t^2}}\, dt \qquad \text{(αντικατάσταση } t = x+1) \\ &= \int_1^2 \frac{t}{\sqrt{4-t^2}}\, dt + 3\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2^2-t^2}}\, dt \\ &= -\sqrt{4-t^2}\Big|_{t=1}^{t=2} + 3\arcsin\left(\frac{t}{2}\right)\Big|_{t=1}^{t=2} \\ &= \sqrt{3} + 3\left[\arcsin 1 - \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\right] \\ &= \sqrt{3} + 3\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right] = \sqrt{3} + \pi\,.\end{aligned}$$

■

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες