ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΙΙ ΣΕΜΦΕ (10/9/2014)

ΘΕΜΑ 1. (α) Έστω $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ με $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$. Δείξτε τα εξής: (i) Υπάρχει $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^d$ με $\|\mathbf{y}_0\| = 1$ και $\langle \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0 \rangle = \|\mathbf{x}_0\|$. (ii) $\|\mathbf{x}_0\| = \max\{\langle \mathbf{x}_0, \mathbf{y} \rangle : \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d \text{ και } \|\mathbf{y}\| \leq 1\}$.

(β) Έστω $(\mathbf{x}_n)$ ακολουθία στον $\mathbb{R}^d$ και $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. (i) Διατυπώστε τον ορισμό της σύγκλισης της $(\mathbf{x}_n)$ στο $\mathbf{x}$. (ii) Αν η $(\mathbf{x}_n)$ συγκλίνει στο $\mathbf{x}$ δείξτε ότι και η ακολουθία των νορμών $(\|\mathbf{x}_n\|)$ συγκλίνει στη νόρμα $\|\mathbf{x}\|$ του $\mathbf{x}$. Τι συμπέρασμα έχετε για την συνάρτηση $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ με τύπο $\phi(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$;

ΘΕΜΑ 2. (α) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x,y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$$

αν $(x,y) \neq (0,0)$ και $f(0,0) = 0$. (i) Δείξτε ότι $|f(x,y)| \leq |x| + |y|$ για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$. (ii) Δείξτε ότι η f είναι συνεχής.

(β) Εξετάστε αν υπαρχει το παρακάτω όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \cos y}{x^2 + y^2}.$$

ΘΕΜΑ 3. (α) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y) = xy + e^{xy}$. Εξηγείστε γιατί η f είναι διαφορίσιμη σε κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ και βρείτε την παράγωγό της στο σημείο $(1,2)$.

(β) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

αν $(x,y) \neq (0,0)$ και $f(0,0) = 0$. Δείξτε ότι οι μερικές παράγωγοι της f στο $(0,0)$ υπάρχουν αλλά η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$.

ΘΕΜΑ 4. (α) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y) = x^2 + y^2$. Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^2$ και βρείτε την $\frac{\theta f(1,2)}{\theta \mathbf{e}}$ όπου $\mathbf{e} = (3/5, 4/5)$. Βρείτε επίσης τη διευθύνση $\mathbf{e}_0$ κατά την οποία η $\frac{\theta f(1,2)}{\theta \mathbf{e}_0}$ γίνεται μέγιστη.

(β) Γράψτε τον τύπο του Taylor 2ου βαθμού της συνάρτησης $f(x,y) = e^x \sin y$ στο σημείο $(0,0)$.

ΘΕΜΑ 5. (α) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f. Έχει η f ολικά ακρότατα;

(β) Αποδείξτε ότι η εξίσωση $x^2 + y^2 + z + z^5 = 0$ ορίζει πεπλεγμένα μια μοναδική συνάρτηση $z = f(x,y)$ σε μια περιοχή του σημείου $(0,0,0)$ και δείξτε ότι το $(0,0)$ είναι κρίσιμο σημείο για την f.