ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
Τομέας Μαθηματικών
Πολυτεχνειούπολη – Ζωγράφου ΑΘΗΝΑ - 157 80

ΕΞΕΤΑΣΗ 3ΟΥ ΕΞΑΜΗΝΟΥ ΣΤΙΣ ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ 2018 ΟΜΑΔΑ Α

ΖΗΤΗΜΑ ΠΡΩΤΟ: α) Αν α, β, γ είναι θετικές σταθερές να δειχτεί ότι η διαφορά κάθε δύο λύσεων της διαφορικής εξίσωσης $\alpha y''+\beta y'+\gamma y=\varphi(t)$ τείνει στο μηδέν του $t\to\infty$. (μον.0.5)

β) Να δειχθεί ότι i) οι $y_1(t)=e^{-t^2/2}$ και $y_2(t)=e^{-t^2/2}\int_0^t e^{s^2/2}ds$ είναι λύσεις της $y''+ty'+y=0$ στο διάστημα $-\infty<t<+\infty$ και ii) αποτελούν θεμελιώδες σύνολο λύσεων στο ίδιο διάστημα. (μον.1.25)

γ) Να δοθεί η μορφή της γενικής λύσης της εξίσωσης
$y'''-2y''+y'-2y=t+\sin t$. (μον. 0.75)

ΖΗΤΗΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟ: α) Να χαρακτηριστούν τα ιδιάζοντα σημεία και για τα κανονικά να καθοριστεί η δείκτρια εξίσωση, οι εκθέτες ιδιομορφίας και η ακτίνα σύγκλισης της λύσης σε δυναμοσειρά της εξίσωσης $(x+2)^2(x-1)y''+(x^2+1)y'+y=0$ (μον. 0.75)

β) Δίνεται η διαφορική εξίσωση Legendre $(1-t^2)y''-2ty'+\alpha(\alpha+1)y=0$. Αν $P_4(t),P_8(t)$ είναι οι πολυωνυμικές λύσεις της εξίσωσης για $a=4,8$ αντιστοίχως να διατυπωθεί και αποδειχθεί η σχέση ορθογωνιότητας που συνδέει τα πολυώνυμα Legendre $P_4(t),P_8(t)$. (μον. 0.5)

γ) Να λυθεί με χρήση ολοκληρωτικού μετασχηματισμού η εξίσωση

$$y''+y=\begin{cases} t, & 0\le t<1 \\ 2, & 1\le t<\infty \end{cases}\qquad y(0)=0,\ y'(0)=0\ .$$ (μον.1.25)

ΖΗΤΗΜΑ ΤΡΙΤΟ:

α) Να βρεθεί η γενική λύση της η δ. ε. $y+\left(2xy-e^{-2y}\right)y'=0$. Να βρεθεί, αν υπάρχει, ειδική λύση με $y(1)=1$. (μον. 1)

β) Να βρεθεί η γενική λύση της δ. ε. $y'=-\dfrac{4x+3y}{2x+y}$. (μον. 1)

γ) Δίνεται το ΠΑΤ $y'=\dfrac{e^{t+y}}{t+y},\ y(t_0)=y_0$. Να προσδιοριστούν όλες οι περιοχές του ty επιπέδου στις οποίες ισχύουν οι συνθήκες του Θ. ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης. Να δικαιολογηθεί η απάντησή σας. Να δοθεί η μορφή του αναγωγικού σχήματος του Picard που δίνει τη λύση για $y(t_0)=y_0$ με ζεύγος τιμών (t_0,y_0) δικής σας επιλογής (χωρίς να γίνουν υπολογισμοί). (μον. 0.75)

ΖΗΤΗΜΑ ΤΕΤΑΡΤΟ:
Με τη μέθοδο των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων να βρεθεί η γενική λύση του γραμμικού συστήματος $\mathbf{x}'=A\cdot\mathbf{x}$ όπου $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix}$. Να προσδιοριστεί το είδος και η ευστάθεια του κρίσιμου σημείου $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. (μον. 2.25)

Δίνεται ο μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων:

$$L(t^n)=\frac{n!}{s^{n+1}},\ L(\cos at)=\frac{s}{s^2+a^2},\ L(\sin at)=\frac{a}{s^2+a^2},\ L\left(e^{at}f(t)\right)=F(s-a),\ L\left(u_a(t)f(t-a)\right)=e^{-sa}F(s),$$

αν $F(s)=L(f(t))$ και $u_a(t)=H(t-a)=\begin{cases}0, & t<a,\\ 1, & t\ge a,\end{cases}\ ,\ a\ge 0$.

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες. **Καλή επιτυχία**