ΖΗΤΗΜΑ ΠΡΩΤΟ:

α) Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το Θεώρημα που συνδέει τη γραμμική ανεξαρτησία των λύσεων $f_1(\omega)$, $f_2(\omega)$, $\omega \in I$, I ανοιχτό διάστημα, μιας $2^{ης}$ τάξης ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με την ορίζουσα Wronski. (μον. 1.25)

β) Να δοθεί η μορφή της γενικής λύσης της εξίσωσης $y''' - y'' + y' - y = 2t^2 + 3\,sint$. (μον. 0.75)

γ) Αν f_1 , f_2 , f_3 είναι τρεις λύσεις της διαφορικής εξίσωσης $y''' + p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0$ όπου $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ συνεχείς να δοθεί μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης η οποία να δέχεται ως λύση την $\begin{vmatrix} f_1 & f_1' & f_1'' \\ f_2 & f_2' & f_2'' \\ f_3 & f_3' & f_3'' \end{vmatrix}$. (μον. 0.5)

δ) Οι $y_1(t) = 3e^t + e^{t^2}$, $y_2(t) = 7e^t + e^{t^2}$, $y_3(t) = 5e^t + e^{-t^3} + e^{t^2}$ είναι τρεις λύσεις της $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$. Να βρεθεί η γενική λύση. (μον. 0.75)

ΖΗΤΗΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟ:

α) Να χαρακτηριστούν τα ιδιάζοντα σημεία και για τα κανονικά να καθοριστεί η δείκτρια εξίσωση, οι εκθέτες ιδιομορφίας και η ακτίνα σύγκλισης της λύσης σε δειναμοσειρά της εξίσωσης $(x+3)^2(x-1)y'' + (x^2+1)y' + 3y = 0$ (μον. 0.75)

β) Να λυθεί με χρήση ολ. μετασχηματισμού η εξίσωση

$$y''(t) + 2y = \begin{cases} cost\,, & 0 \le t < \dfrac{\pi}{2} \\ 1, & \dfrac{\pi}{2} \le t < \infty \end{cases} \quad , \quad y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 0 \quad .$$ (μον. 1)

ΖΗΤΗΜΑ ΤΡΙΤΟ:

α) Να βρεθεί η γενική λύση της η δ.ε. $y\,dx + x(xy-1)\,dy = 0$. Να βρεθεί, αν υπάρχει, ειδική λύση με $y(1) = 1$. (μον. 1)

β) Να βρεθεί η γενική λύση της δ.ε. $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$. (μον. 1)

γ) Δίνεται το Π.Α.Τ. $y' = t\,siny$, $y(t_0) = y_0$. Να προσδιορισθούν όλες οι περιοχές του ty επιπέδου στις οποίες ισχύουν οι συνθήκες του Θ. ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης.

Να δικαιολογηθεί η απάντησή σας. Να δοθεί η μορφή του αναγωγικού σχήματος του Picard που δίνει τη λύση για $y(0)=0$ (χωρίς να γίνουν υπολογισμοί). (μον. 0.75)

ΖΗΤΗΜΑ ΤΕΤΑΡΤΟ:

Με τη μέθοδο των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων να βρεθεί η γενική λύση του γραμμικού συστήματος $\boldsymbol{x}' = A\cdot\boldsymbol{x}$ όπου $A=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -1 & 1\end{pmatrix}$. Να προσδιοριστεί το είδος και η ευστάθεια του κρίσιμου σημείου $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. (μον. 2.25)

Δίνεται ο μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων :

$L(t^n)=\frac{n!}{s^{n+1}}$, $L(\cos at)=\frac{s}{s^2+a^2}$, $L(\sin at)=\frac{a}{s^2+a^2}$, $L(e^{at}f(t))=F(s-a)$,

$L(u_a(t)f(t-a))=e^{-sa}F(s)$,

αν $F(s)=L(f(t))$ και $u_0(t)=H(t-a)=\begin{cases}0, & t<a.\\ 1, & t\geq a\end{cases}$, $a\geq 0$.

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες, **Καλή επιτυχία**