ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
Τομέας Μαθηματικών Πολυτεχνειούπολη – Ζωγράφου ΑΘΗΝΑ - 157 80
ΟΜΑΔΑ ΘΕΜΑΤΩΝ Α , 8 Φεβρουαρίου 2017

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ 3ΟΥ ΕΞΑΜΗΝΟΥ ΣΤΙΣ ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΖΗΤΗΜΑ ΠΡΩΤΟ:

α) Να αποδειχθεί ότι αν οι συναρτήσεις $y_1(t), y_2(t)$ έχουν κοινό μέγιστο στο ίδιο σημείο δε μπορούν να αποτελούν θεμελιώδες σύνολο λύσεων μιας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης. (μον. 0.5)

β) Οι συναρτήσεις $y_1(t)=3e^t+e^{t^2}, y_2(t)=7e^t+e^{t^2}, y_3(t)=5e^t+e^{-t^3}+e^{t^2}$ είναι τρεις λύσεις της $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ Να βρεθεί η γενική λύση. (μον. 0.75)

γ) Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $y'''-y'=2\sin t$. (μον.075)

ΖΗΤΗΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟ:

α) Βρείτε β τέτοιο ώστε η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών $x^2y''-2y=0, \mathrm{y}(1)=1, \mathrm{y}'(1)=\beta$ να είναι φραγμένη καθώς $x\to 0$ (μον.0.75)

β) Να διατυπώσετε τις συνθήκες ώστε το $x=\infty$ να είναι <u>ομαλό</u> σημείο για τη διαφορική εξίσωση $P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0$. (Υπόδειξη: Για να χαρακτηρίσουμε το $x=\infty$ ως ομαλό σημείο για τη διαφορική εξίσωση $P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $\xi=\dfrac{1}{x}$ και μελετάμε την προκύπτουσα εξίσωση στο $\xi=0$). (μον.0.75)

γ) Εάν $f(t)=t^m, g(t)=t^n$, n,m θετικοί ακέραιοι να δειχθεί ότι η συνέλιξη $f*g(t)=t^{m+n+1}\int_0^1 u^m(1-u)^n\,du$ και ακολούθως να δειχθεί ότι $\int_0^1 u^m(1-u)^n\,du=\dfrac{m!n!}{(m+n+1)!}$ (μον.0.75)

δ) Να λυθεί με χρήση ολοκληρωτικού μετασχηματισμού η εξίσωση $y'(t)=\sin t+\int_0^t y(t-b)\cos b\,db, y(0)=0$.
(μον.0.75)

ΖΗΤΗΜΑ ΤΡΙΤΟ:

α) Να βρεθεί η γενική λύση της η δ. ε. $y+\left(2x-ye^y\right)y'=0$. Να βρεθεί, αν υπάρχει, ειδική λύση με $y(1)=1$.
(μον. 1)

β) Να βρεθεί η γενική λύση της δ. ε. $y'=\dfrac{y-4x}{x-y}$. (μον. 1)

γ) Δίνεται το ΠΑΤ $y'=\dfrac{3t^2+4t+2}{y-1}, y(t_0)=y_0$. Να προσδιοριστούν όλες οι περιοχές του ty επιπέδου στις οποίες ισχύουν οι συνθήκες του θεωρήματος ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης. Να δικαιολογηθεί η απάντησή σας. Να δοθεί η μορφή του αναγωγικού σχήματος του Picard που δίνει τη λύση για $y(0)=0$. (μον. 0.5)

ΖΗΤΗΜΑ ΤΕΤΑΡΤΟ:

Με τη μέθοδο των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων να βρεθεί η γενική λύση του γραμμικού συστήματος $\mathbf{x}'=A\cdot\mathbf{x}$ όπου $A=\begin{pmatrix}1 & -5\\ 1 & -3\end{pmatrix}$. Να προσδιοριστεί το είδος και η ευστάθεια του κρίσιμου σημείου $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. (μον. 2.5)

Δίνεται ο μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων:

$L\left(t^n\right)=\dfrac{n!}{s^{n+1}}$, $L(\cos at)=\dfrac{s}{s^2+a^2}$, $L(\sin at)=\dfrac{a}{s^2+a^2}$, $L\left(e^{at}f(t)\right)=F(s-a)$, $L\left(u_a(t)f(t-a)\right)=e^{-sa}F(s)$,

αν $F(s)=L(f(t))$ και $u_a(t)=H(t-a)=\begin{cases}0, & t<a,\\ 1, & t\ge a,\end{cases}$, $a\ge 0$.

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες, **Καλή επιτυχία**