

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

1 (25). Ένα σωματίδιο κινείται τυχαία πάνω στον x -άξονα. Σε κάθε χρονική στιγμή κάνει ένα βήμα δεξιά (δηλ. προς την θετική κατεύθυνση) με πιθανότητα p ή ένα βήμα αριστερά (δηλ. προς την αρνητική κατεύθυνση) με πιθανότητα $q = 1 - p$. Κάθε βήμα είναι ανεξάρτητο από τα άλλα βήματα. Αρχικά το σωματίδιο βρίσκεται στο 0.

(α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα μετά από δύο χρονικές στιγμές το σωματίδιο να ξαναβρεθεί στο 0.

(β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα μετά από τρεις χρονικές στιγμές το σωματίδιο να βρεθεί ένα βήμα δεξιά από το 0.

(γ) Δεδομένου ότι μετά από τρεις χρονικές στιγμές το σωματίδιο βρέθηκε ένα βήμα δεξιά από το 0, ποιά είναι η πιθανότητα την πρώτη χρονική στιγμή να βρέθηκε ένα βήμα δεξιά από το 0;

2 (25). Σε μια αγροτική περιοχή ο χρόνος T που θα συμβεί η επόμενη ισχυρή χαλαζόπτωση ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέση τιμή 25 χρόνια. Μια εταιρεία που κατασκευάζει στέγαστρα εγγυάται ότι θα αντικαταστήσει δωρεάν το στέγαστρο, αν αυτό καταστραφεί από χαλαζόπτωση μέσα στα επόμενα a χρόνια.

(α) Πόσο πρέπει να είναι το a ώστε το ποσοστό των στεγαστρων που θα αντικαταστήσει η εταιρεία να είναι μικρότερο του 15%;

(β) Έστω ότι ένας αγρότης πλήρωσε 1000 Ευρώ για ένα στέγαστρο και θέλει να το ασφαλίσει για χαλαζόπτωση μετά τη λήξη της εγγύησης της εταιρείας. Ποιό είναι (περίπου) ένα λογικό ετήσιο ασφάλιστρο που θα μπορούσε να πληρώνει ο αγρότης;

3 (25). Έστω X και Y δύο τυχαίες μεταβλητές με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x, y) = c, \quad (x, y) \in D \quad \text{και} \quad f(x, y) = 0, \quad (x, y) \notin D,$$

όπου D είναι το τριγωνικό χωρίο που προσδιορίζεται από τους άξονες x, y και την ευθεία $x + y = 1$.

(α) Να υπολογιστεί η σταθερά c .

(β) Να προσδιοριστούν οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$ και $f_Y(y)$ των X και Y αντίστοιχα, καθώς και η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x|y)$ της X , δεδομένου $Y = y$.

(γ) Να υπολογιστούν οι μέσες τιμές $E[X]$ και $E[Y]$ των X και Y αντίστοιχα, καθώς και η διασπορά $V[X + Y]$.

(δ) Είναι οι τυχαίες μεταβλητές X και Y ανεξάρτητες; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

4 (25). Οι διοργανωτές μιας καλλιτεχνικής εκδήλωσης εκτιμούν (από την πείρα τους) ότι από τα άτομα που θα λάβουν προσκλήσεις θα έρθει στην εκδήλωση ένα 40%. Πόσες τουλάχιστον προσκλήσεις πρέπει να σταλούν ώστε να έρθουν στην εκδήλωση το λιγώτερο 100 άτομα με πιθανότητα τουλάχιστον 90%;

Διάρκεια 2h 15min

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!