A

Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. 2ο Εξάμηνο - 20 Σεπτεμβρίου 2017
Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές

ΘΕΜΑΤΑ

Θ1. i) Έστω ο γραμμικός μετασχηματισμός $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με τύπο $T(x, y, z) = (x+y-z, y-x, z-y)$. Να βρεθεί ο τύπος του T^*. **(1 μ)**

ii) Θεωρούμε το συμμετρικό πίνακα $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$.

Να βρεθεί ορθογώνιος πίνακας P και διαγώνιος πίνακας D έτσι ώστε ο $P^\top AP = D$. Στη συνέχεια για τις διάφορες τιμές του $n \in \mathbb{N}$ να υπολογίσετε τον πίνακα $P^\top A^n P$. **(1,5 μ)**

Θ2. i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $<,>: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $< x, y >= 2x_1y_1 + 3x_2y_2$ ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^2$. **(0,5 μ)**

ii) Έστω $(V, <,>)$ Ευκλείδειος χώρος, $T : V \to V$ γραμμικός μετασχηματισμός και $\{v_1, \ldots, v_n\}$ μια ορθοκανονική βάση του V. Δείξτε ότι ο T είναι ορθογώνιος (δηλαδή $< Tx, Ty >=< x, y >$ για κάθε $x, y \in V$) αν και μόνο αν το $\{Tv_1, \ldots, Tv_n\}$ είναι πάλι μια ορθοκανονική βάση του V. **(1 μ)**

iii) Δινεται η τετραγωνική μορφή $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 3x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$, για κάθε $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Να βρείτε τον συμμετρικό πίνακα $A \in M_3(\mathbb{R})$ που αντιστοιχεί στην f, τις ιδιοτιμές του A και εξετάστε αν η f είναι θετικά ή αρνητικά ορισμένη. **(1μ)**

Θ3. i) Έστω δύο $\nu \times \nu$ πίνακες A, B με το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(\lambda) = \chi_B(\lambda)$. Αν όλες οι ιδιοτιμές τους έχουν γεωμετρική πολλαπλότητα 1, αποδείξτε ότι οι δύο πίνακες είναι όμοιοι. **(0,8μ)**

ii) Έστω ένας $\nu \times \nu$ αντιστρέψιμος πίνακας A με ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$. Βρείτε τις ιδιοτιμές και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του πίνακα $adj(A)$. **(1,2μ)**

Θ4. Έστω ο πίνακας $A(\alpha) = \begin{bmatrix} 4-2\alpha & -3+2\alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3-2\alpha & -3+2\alpha & 2 \end{bmatrix}$ με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) Για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, βρείτε τις ιδιοτιμές, τους ιδιόχωρους και το ελάχιστο πολυώνυμο του $A(\alpha)$. **(1,8μ)**

ii) Για τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ο πίνακας $A(\alpha)$ δεν είναι διαγωνοποιήσιμος με μετασχηματισμό ομοιότητας, κατασκευάστε πλήρως την κανονική μορφή Jordan του $A(\alpha)$ και τον αντίστοιχο πίνακα ομοιότητας. **(1,2μ)**

Διάρκεια εξέτασης: 2,5 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ