## "ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ -ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ"
## ΣΕΜΦΕ & ΣΗΜΜΥ -Ε.Μ.Π.
## 03/09/2019

**Θέμα 1:(α)(1 μ.)** Έστω $f$ ολόμορφη συνάρτηση στο πεδίο $U \subset \mathbb{C}$. Υποθέτουμε ότι για κάποια $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $|\alpha| + |\beta| \neq 0$ ισχύει $\alpha Ref(z) + \beta Imf(z) + \gamma = 0,\ \forall z \in U$. Να δείξετε ότι η $f$ είναι σταθερή.

**(β)(1 μ.)** Έστω $f$ συνεχής συνάρτηση στο πεδίο $U \subset \mathbb{C}$. Υποθέτουμε ότι η $f^2$ είναι ολόμορφη στο $U$ και ότι $f(z) \neq 0$ για κάθε $z \in U$. Να αποδείξετε ότι η $f$ είναι ολόμορφη στο $U$.

**Θέμα 2: (α)(1 μ.)** Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \dfrac{z^{10}}{1+z^{20}}$. Να υπολογίσετε τις παραγώγους $f^{(50)}(0)$, $f^{(100)}(0)$.

**(β)** Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(z) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{z^n}{n}$. Να δείξετε ότι:

**(i)(0,3 μ.)** Η συνάρτηση $F$ είναι ολόμορφη στον δίσκο $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

**(ii)(0,7 μ.)** $F(z) = \mathrm{Log}(1+z)$, για κάθε $z \in D$.

**Θέμα 3:(1,5 μ.)** Έστω $T$ το κλειστό τριγωνικό χωρίο με κορυφές τις εικόνες των μιγαδικών $-1,\ 0,\ 1+i$ στο επίπεδο. Να βρείτε το $\max\limits_{z \in T} \left|e^{z^2}\right|$ καθώς και τα σημεία του $T$ στα οποία το παραπάνω max λαμβάνεται.

**Θέμα 4:(1 μ.)** Με χρήση μιγαδικής ολοκλήρωσης, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+4)} dx.$$

**Θέμα 5:** Εάν $\gamma(t) = e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$, να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$$(0,5\mu.)\ \int_\gamma \frac{\overline{z} e^{z^2}}{z^4} dz \qquad (0,5\mu.)\ \int_\gamma z^7 \cos\left(\frac{1}{z^2}\right) dz \qquad (1,5\mu.)\ \int_\gamma \frac{e^z - 1 - z}{(1-\cos z)^2} dz$$

**Θέμα 6: (1 μ.)** Έστω $f$ ακέραια συνάρτηση τέτοια ώστε για κάθε $R > 0$,

$$\max_{|z|=R} |f(z)| \ \leq\ AR^2 + B,$$

όπου $A, B$ θετικές πραγματικές σταθερές. Να δείξετε ότι η $f$ είναι πολυώνυμο βαθμού $\leq 2$.

Θ.1. (α) Έστω $u = \mathrm{Re} f$, $v = \mathrm{Im} f$. Τότε,

$$au + \beta v + \gamma = 0 \Rightarrow \begin{cases} a u_x + \beta v_x = 0 \\ a u_y + \beta v_y = 0 \end{cases}$$

$$\overset{(C-R)}{\Longrightarrow} \begin{cases} a u_x + \beta v_x = 0 & (1) \\ a(-v_x) + \beta u_x = 0 & (2) \end{cases}$$

Το σύστημα των (1), (2) έχει μη μηδενική λύση, οπότε

$$\begin{vmatrix} u_x & v_x \\ -v_x & u_x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow u_x^2 + v_x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow u_x = v_x = 0.$$

Άρα, $f' = u_x + i v_x = 0$, στο $U$.

$\Rightarrow f =$ σταθερή στο $U$.

(β) $\lim_{z \to z_0} [f(z) + f(z_0)] = 2f(z_0) \neq 0$, $\forall z_0 \in U$.

Έστω $z_0 \in U$. Από το παραπάνω έπεται ότι $\exists \delta > 0 \mid D(z_0, \delta) \subset U$ και

$$f(z) + f(z_0) \neq 0, \quad \forall z \in D(z_0, \delta).$$

Τότε, $\forall z \in D(z_0, \delta)$,

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{[f(z)]^2 - [f(z_0)]^2}{z - z_0} \cdot \frac{1}{f(z) + f(z_0)}$$

$$\Rightarrow \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = (f^2)'(z_0) / 2f(z_0)$$

$\Rightarrow f$ διαφορίσιμη στο $z_0 \in U$.

Θ. 2 (α) Για $|z|<1$, θέτω $w = z^{10}$, οπότε

$$f(z) = \frac{w}{1+w^2} = w \cdot \frac{1}{1-(-w^2)} =$$

$$= w \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^{2n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{20n+10}.$$

$$\frac{f^{(50)}(0)}{50!} = \text{συντελ}\left(z^{50}\right) = (-1)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad \underline{f^{(50)}(0) = 50!},$$

$$\frac{f^{(100)}(0)}{100!} = \text{συντελ}\left(z^{100}\right) = 0,$$

διότι δεν υπάρχει $n \in \mathbb{N} \mid 20n+10 = 100$
$\Leftrightarrow 20n = 90$.

(β) (i) Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι

$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{\left|(-1)^n/n\right|}} = \frac{1}{\lim \frac{1}{\sqrt[n]{n}}} = 1$$

$\Rightarrow$ η δυναμοσειρά συγκλίνει στον $D$

$\Rightarrow$ $F$ ολόμορφη στον $D$.

(ii) $\forall z \in D,\ F'(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cancel{n} z^{n-1}}{\cancel{n}} =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = \frac{1}{1+z}.$$

Επιπλέον, η $z \mapsto \mathrm{Log}(1+z)$ είναι ολόμορφη στον $D$ διότι για $|z|<1$,

$$\mathrm{Re}(1+z) = 1 + \mathrm{Re}(z) \geq 1 - |z| > 0$$

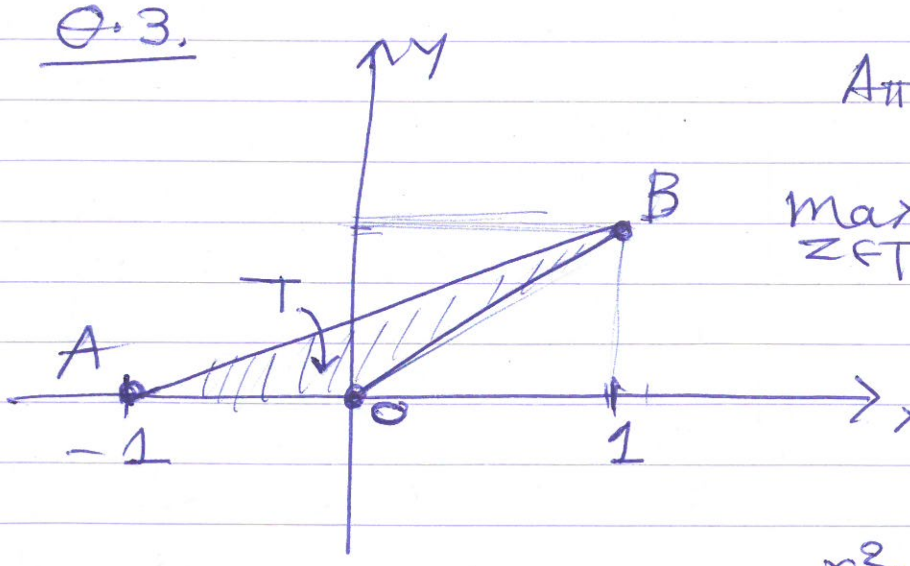
$$\Rightarrow\ 1+z \notin \{ w \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, w = 0,\ \mathrm{Re}\, w \leq 0 \}.$$

Έχουμε $\forall z \in D$,

$$F'(z) = \frac{1}{1+z} = [\mathrm{Log}(1+z)]'$$

κ' επειδή $F(0) = 0 = \mathrm{Log}(1+0)$, έπεται το ζητούμενο.

Θ.3.




Από Αρχή Μεγίστου,

$$\max_{z \in T} |e^{z^2}| = \max_{z \in \partial T} |e^{z^2}| = \max_{z \in \partial T} e^{\mathrm{Re}(z^2)}.$$

• $\max_{z \in (AO)} |e^{z^2}| = \max_{x \in [-1,0]} e^{x^2} = e^{(-1)^2} = e$

④

- $\max_{z\in(OB)} |e^{z^2}| = \max_{x\in[0,1]} e^{Re(x+ix)^2}$

$= \max_{x\in[0,1]} e^{Re(2ix)} = e^0 = 1$

- ~~max~~ $AB: \ x = 2y-1$

Εάν $z = x+iy \in AB$, τότε

$z^2 = [(2y-1)+iy]^2 \Rightarrow Re(z^2) = (2y-1)^2 - y^2$

$= 3y^2 - 4y + 1$

$= \varphi(y), \ y\in[0,1].$

$\max_{y\in[0,1]} \varphi(y) = 1 = \varphi(0)$

$\Rightarrow \max_{z\in AB} |e^{z^2}| = \max_{y\in[0,1]} e^{\varphi(y)} = e$

και λαμβάνεται για $z=-1$.

Συνοψίζοντας, $\max_{z\in T} |e^{z^2}| = e$ και

λαμβάνεται για $z=-1$.

Θ. 4. $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{(1+z^2)(4+z^2)}$ (5)

Ανώμαλα σημεία : $\pm i, \pm 2i$.

Μόνο τα $i, 2i$ έχουν φανταστικό μέρος θετικό

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i\left[Res(f,i)+Res(f,2i)\right].$$

Τα $i, 2i$ είναι απλοί πόλοι της $f$ οπότε

$$Res(f,i) = \left.\frac{\frac{e^{iz}}{4+z^2}}{(1+z^2)'}\right|_{z=i} = \frac{e^{-1}/3}{2i}$$

$$= \frac{1}{6ei},$$

$$Res(f,2i) = \frac{\frac{e^{iz}}{1+z^2}}{(4+z^2)'} = \frac{\frac{e^{-2}}{-3}}{4i}$$

$$= -\frac{1}{12e^2 i}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi\left(\frac{1}{6e}-\frac{1}{12e^2}\right)$$

$$= \pi\left(\frac{1}{3e}-\frac{1}{6e^2}\right)$$

(6)

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)(4+x^2)}\,dx = \pi\left(\frac{1}{3e} - \frac{1}{6e^2}\right).$$

Θ.5.

• Για $|z|=1$, $\bar{z} = 1/z$ οπότε

$$I = \int_{\gamma} \frac{\bar{z}\, e^{z^2}}{z^4}\,dz = \int_{\gamma} \frac{e^{z^2}}{z^5}\,dz$$

$$= 2\pi i \,\mathrm{Res}\left(\frac{e^{z^2}}{z^5}, 0\right)$$

Αλλά, για $z \neq 0$,

$$\frac{1}{z^5} e^{z^2} = \frac{1}{z^5}\left(1 + \frac{z^2}{1!} + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^6}{3!} + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{z^5} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{2}\frac{1}{z} + \frac{1}{3!} z + \cdots$$

$$\Rightarrow \mathrm{Res}\left(\frac{e^{z^2}}{z^5}, 0\right) = 1/2 \Rightarrow \underline{\underline{I = \pi i}}.$$

• Για $|z|>0$,

$$z^7 \cos\left(\frac{1}{z^2}\right) = z^7\left(1 - \frac{1}{2!\,z^4} + \frac{1}{4!\,z^8} - \cdots\right)$$

$$= z^7 - \frac{z^3}{2} + \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{z} - \cdots$$

$$\Rightarrow \mathrm{Res}\left(z^7 \cos\left(\frac{1}{z^2}\right), 0\right) = \frac{1}{24}$$

7

$$\Rightarrow \int_\gamma z^7 \cos\left(\frac{1}{z^2}\right)dz = 2\pi i/24 = \pi i/12.$$

• $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$e^z - 1 - z = \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots$$

$$= z^2 \varphi(z),$$

$$1 - \cos z = \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} - \cdots$$

$$= z^2 \psi(z),$$

όπου

$$\varphi(z) = \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \cdots,$$

$$\psi(z) = \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \cdots,$$

$$\varphi(0) = 1/2,\ \varphi'(0) = 1/6,\ \psi(0) = 1/2,$$

$$\psi'(0) = 0.$$

$$f(z) = \frac{e^z - 1 - z}{(1-\cos z)^2} = \frac{\varphi(z)}{z^2 \psi(z)^2}$$

$$\lim_{z\to 0}\left[z^2 f(z)\right] = \frac{\varphi(0)}{\psi(0)^2} \neq 0$$

$\Rightarrow 0 =$ διπλός πόλος της $f$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}(f,0) = \lim_{z\to 0}\left[z^2 f(z)\right]' =$$

$$= \frac{\varphi'(0)\,\psi(0)^2 - 2\varphi(0)\psi(0)\cancel{\psi'(0)}}{[\psi(0)]^4}$$

$$= \frac{\varphi'(0)}{\psi(0)^2} = \frac{1/6}{1/4} = 2/3.$$

Τα ανώμαλα σημεία της $f$ είναι $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

αλλά μόνο το $0 \in \operatorname{int}\gamma^*$ οπότε

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f,0) = 4\pi i/3.$$

---

**Θ. 6.** Έστω $R>0$. Θεωρώ τον κύκλο

$$\gamma_R(t) = Re^{it},\quad t\in[0,2\pi].$$

$\forall z \in \gamma_R^*$, είναι $|z| = R \xrightarrow{\text{Υπόθεση}}$

$$|f(z)| \leq AR^2 + B$$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(z)}{z^{n+1}}\right| \leq \frac{AR^2+B}{R^{n+1}},\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Από Θ.Τ. Cauchy για παραγώγους έχουμε $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \right|$$

$$\overset{ML-\text{ανισ.}}{\leq} \cancel{\frac{1}{2\pi} 2\pi} R \, \frac{AR^2+B}{R^{n+1}}$$

$$= \frac{AR^2+B}{R^n}$$

Για σταθερό $n \geq 3$, παίρνοντας το όριο καθώς $R \to +\infty$ στην παραπάνω, το β΄ μέλος τείνει στο $0$ $\Rightarrow \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0$.

Επειδή $f$ ακέραια από Θ. Taylor έχουμε $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{2} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

$$= f(0) + f'(0)z + \frac{f''(0)}{2} z^2$$

$\Rightarrow f$ πολυώνυμο βαθμού $\leq 2$.