

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

1. Έχουμε n φαινομενικά ίδια νομίσματα. Ένα από αυτά είναι κίβδηλο και έχει πιθανότητα p να φέρει Γράμματα (καί, άρα, $1 - p$ να φέρει Κορώνα). Τα άλλα $n - 1$ νομίσματα είναι τίμια. Επιλέγουμε τυχαία ένα νόμισμα και το στρίβουμε τρεις φορές.

(α) Αν και τις τρεις φορές φέρει Γράμματα, ποιά είναι η πιθανότητα να έχουμε επιλέξει το κίβδηλο;

(β) Έστω Γ_j , $j = 1, 2, 3$, τα ενδεχόμενα να έφερε Γράμματα το νόμισμα που διαλέξαμε στην πρώτη, δεύτερη και τρίτη ρίψη αντίστοιχα. Είναι τα ενδεχόμενα Γ_1 , Γ_2 και Γ_3 ανεξάρτητα; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

2. Έστω X εκθετική τ.μ. με παράμετρο a και Y εκθετική τ.μ. με παράμετρο b . Δίνεται ότι οι X και Y είναι ανεξάρτητες.

(α) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X < Y)$.

(β) Αν $W = X + Y$, να υπολογίσετε την μέση τιμή $E[W]$, την διασπορά $V[W]$, τη χαρακτηριστική συνάρτηση $\phi_W(t)$, καθώς και τη μέση τιμή $E[W^3]$.

3. Μια εταιρεία κινητής τηλεφωνίας παρέχει στους συνδρομητές της 270 λεπτά δωρεάν χρόνου ομιλίας σε κάθε περίοδο χρέωσης (30 ημέρες). Έχει παρατηρηθεί ότι η συνολική ημερήσια διάρκεια εξερχόμενων κλήσεων ενός συνδρομητή σε λεπτά είναι τ.μ. με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[1, 16]$.

(α) Υπολογίστε (προσεγγιστικά) την πιθανότητα ο εν λόγω συνδρομητής να ξεπεράσει το όριο του δωρεάν χρόνου ομιλίας σε μια συγκεκριμένη περίοδο χρέωσης 30 ημερών.

(β) Έστω N εκείνη η περίοδος χρέωσης από την έναρξη του συμβολαίου του, κατά την οποία ο εν λόγω συνδρομητής θα ξεπεράσει για πρώτη φορά το όριο του δωρεάν χρόνου ομιλίας. Να υπολογίσετε την μέση τιμή $E[N]$ της τ.μ. N χρησιμοποιώντας την απάντηση του Ερωτήματος (α).

Διάρκεια 2h