ΣΧΟΛΗ: Ε.Μ.Φ.Ε. **ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ** **Σεπτέμβριος 2018**

ΘΕΜΑ 1 (2.5 μονάδες)

Εταιρεία παράγει συνδετήρες τους οποίους συσκευάζει σε κουτάκια. Σε κάθε κουτάκι ο ακριβής αριθμός από συνδετήρες είναι τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση μάζας πιθανότητας την:

x	47	48	49	50	51	52	53
$P(X=x)$	0.04	0.13	0.21	0.29	0.20	0.10	0.03

(α) Να υπολογισθούν η μέση τιμή, η διασπορά και η τυπική απόκλιση της τ.μ. X.

(β) Να υπολογισθεί η συνάρτηση κατανομής $F(x)$ της τ.μ. X.

(γ) Ποια είναι η πιθανότητα για ένα κουτάκι που επιλέγεται τυχαία να περιέχει περισσότερους από 49 και το πολύ 51 συνδετήρες?

(δ) Αν το κόστος παραγωγής (σε σεντς του €) για κάθε κουτάκι είναι τυχαία μεταβλητή $Y=16+2X$, όπου X είναι ο αριθμός των συνδετήρων στο κουτάκι, να βρεθεί το αναμενόμενο κόστος παραγωγής για κάθε κουτάκι. Ποια η πιθανότητα το κόστος παραγωγής Y να υπερβαίνει τα 120 σεντς του ευρώ;

ΘΕΜΑ 2 (2.5 μονάδες)

Έστω η συνάρτηση $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\alpha x}-\alpha x e^{-\alpha x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$.

α) Για ποιες τιμές της παραμέτρου α, η παραπάνω συνάρτηση αποτελεί συνάρτηση κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής Χ;

β) Αν η τ.μ. Χ έχει συνάρτηση κατανομής F(x), να βρεθεί η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Χ.

γ) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X>2\,|\,X>1)$.

ΘΕΜΑ 3 (2.5 μονάδες)

Δύο τυχαία δείγματα από 100 ηλεκτρικές ασφάλειες του εργοστασίου Α και 200 ηλεκτρικές ασφάλειες του εργοστασίου Β βρέθηκαν να έχουν μέση διάρκεια ζωής 24.2 και 26 μήνες ζωής αντίστοιχα με τυπικές αποκλίσεις 4.5 και 5.5 αντίστοιχα.

(α) Να κατασκευαστεί ένα 90% διάστημα εμπιστοσύνης για τη διαφορά των χρόνων ζωής των ασφαλειών που κατασκευάζονται στα δύο εργοστάσια. Τι συμπεραίνετε?

(β) Αν γενικά η ζωή μιας ηλεκτρικής ασφάλειας περιγράφεται από μια τυχαία μεταβλητή Χ που ακολουθεί κανονική κατανομή με μέσο 24 μήνες και διασπορά 25, να βρεθεί η πιθανότητα η μέση διάρκεια ζωής 81 ανεξάρτητων ηλεκτρικών ασφαλειών να είναι από 23 έως 26 μήνες.

ΘΕΜΑ 4 (2.5 μονάδες)

Έστω τυχαίο δείγμα $X_1,\ldots,X_n$ με συνάρτηση μάζας πιθανότητας (σ.μ.π.)

$$f(x,\theta)=\binom{x-1}{r-1}(1-\theta)^{x-r}\theta^{r},\ \ 0<\theta<1,\ x=r,r+1....$$

όπου r γνωστός θετικός ακέραιος.

(α) Να βρεθεί η εκτιμήτρια μεγίστης πιθανοφάνειας (ΕΜΠ) της παραμέτρου θ.

(β) Αν $r=1$, να βρεθεί ΕΜΠ της πιθανότητας $P(X_1\geq 10)$.

(γ) Να βρεθεί ροποεκτιμήτρια της παραμέτρου θ για την περίπτωση που $r=1$.

Διωνυμικη $f(x)=\frac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x}, x=0,1,\ldots,n$	$E(X)=np,\ Var(X)=np(1-p)$
Γεωμετρικη $f(x)=p(1-p)^{x-1},\ x=1,2,\ldots$	$E(X)=\frac{1}{p}, Var(X)=\frac{1-p}{(p)^2}$
Poisson $f(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!},\ x=0,1,\ldots$	$E(X)=\lambda, Var(X)=\lambda$
Κανονικη $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ x\in R$	$E(X)=\mu, Var(X)=\sigma^2$
Γαμμα(α,β) $f(x)=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{a-1}e^{-\beta x},\ x>0$ $\Gamma(\alpha)=(a-1)!$ για $\alpha\in Z$	$E(X)=\frac{\alpha}{\beta}, Var(X)=\frac{\alpha}{\beta^2}$
Ομοιομορφη (a,β) $f(x)=\frac{1}{\beta-a},\quad a\le x\le\beta$	$E(X)=\frac{a+\beta}{2},\quad Var(X)=\frac{(\beta-a)^2}{12}$
Εκθετικη $f(x)=\lambda e^{-\lambda x},\ x>0$	$E(X)=\frac{1}{\lambda}, Var(X)=\frac{1}{\lambda^2}$

$\Phi(1.96)=0.975$, $\Phi(2.33)=0.99$, $\Phi(1.645)=0.95$, $\Phi(1.29)=0.90$

$\Phi(2.5)=0.993$, $\Phi(1.5)=0.933$, $\Phi(3.99)=0.999$, $\Phi(2)=0.9772$,

$\Phi(2.44)=0.992$, $\Phi(0.5)=0.691$, $\Phi(0.125)=0.547$, $\Phi(1.80)=0.964$, $\Phi(3.6)=0.999$

$P(t_{11}>1.796)=0.05, P(t_{14}>2.624)=0.01, P(t_9>2.262)=0.025, P(t_7>1.415)=0.1$

$P(t_6>2.447)=0.025, P(t_7>2.998)=0.01, P(t_9>3.250)=0.005, P(t_8>2.306)=0.025$

$P(t_7>1.895)=0.05, P(t_{12}>2.179)=0.025, P(t_8>0.706)=0.25, P(t_{12}>2.681)=0.01$

$P(t_9>2.821)=0.01, P(t_7>2.365)=0.025, P(t_{12}>1.782)=0.05, P(t_{10}>3.169)=0.005$

$P(\chi_8^2>17.535)=0.025, P(\chi_8^2>20.09)=0.01, P(\chi_7^2>1.690)=0.975, P(\chi_{12}^2>26.22)=0.01$

$P(F_{4,3}>15.101)=0.025, P(F_{5,4}>9.364)=0.025, P(F_{5,4}>6.256)=0.05, P(F_{4,3}>9.117)=0.05$

$P(F_{3,4}>9.276)=0.05, P(F_{4,5}>1.64)=0.025, P(F_{4,5}>16.013)=0.05, P(F_{3,4}>9.979)=0.025$