



Εξέταση του μαθήματος *ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΙΝΑΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ*  
της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Επιστημών

14 - 06 - 2017

**ΘΕΜΑ 1.**

- (α) Έστω ένας τυχαίος πίνακας  $A \in \mathbb{C}^{v \times v}$ , με ερμιτιανό μέρος  $H(A) = (A + A^*)/2$  και  $r(A) = \max \{ |x^* A x| : x \in \mathbb{C}^v, x^* x = 1 \}$ . Να αποδείξετε ότι  $\rho(H(A)) \leq r(A) \leq \|A\|_2$ . (1 μον.)
- (β) Έστω ένας πίνακας  $A \in \mathbb{C}^{v \times v}$  με αντι-ερμιτιανό μέρος  $S(A) = (A - A^*)/2$ . Να αποδείξετε ότι ο  $S(A)$  είναι ένας από τους πλησιέστερους στον  $A$  αντι-ερμιτιανούς πίνακες, ως προς τη νόρμα (0,8 μον.) Frobenius.
- (γ) Για τυχαίους πίνακες  $A, B \in \mathbb{C}^{v \times v}$ , να αποδείξετε ότι  $\|A \cdot B\|_F \leq \|A\|_2 \|B\|_F$ . (1,2 μον.)

**ΘΕΜΑ 2.**

- (α) Να αποδείξετε ότι ένας πίνακας  $A \in \mathbb{C}^{v \times v}$  είναι κανονικός αν και μόνο αν υπάρχει ορθομοναδιαίος πίνακας  $U \in \mathbb{C}^{v \times v}$  τέτοιος ώστε πίνακας  $A^* = A \cdot U$ . (0,7 μον.)
- (β) Έστω ένας τυχαίος πίνακας  $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{v \times v}$ , και  $D(A) = \text{diag} \{ a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{v,v} \}$  ο διαγώνιος πίνακας που έχει ως κύρια διαγώνιο τη διαγώνιο του  $A$ . Να αποδείξετε ότι  $\|D_A\|_2 \leq \|A\|_2$ . (1 μον.)

**ΘΕΜΑ 3.**

- Κατασκευάστε πλήρως μια παραγοντοποίηση ιδιαζουσών τιμών για τον πίνακα  $A = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  και υπολογίστε τον αντίστροφο ή τον ψευδοαντίστροφο του  $A$ . (2,2 μον.)

Έπειτα, υπολογίστε έναν από τους πλησιέστερους στον  $A$  πίνακες που έχει ιδιοτιμή το 0 γεωμετρικής πολλαπλότητας 2. (0,5 μον.)

**ΘΕΜΑ 4.**

- (α) Να κατασκευάσετε, με πλήρη απόδειξη, το ψευδοφάσμα ενός τυχαίου κανονικού πίνακα  $A \in \mathbb{C}^{v \times v}$  με ιδιοτιμές  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_v$  ως προς τη νόρμα  $\|\cdot\|_2$ . (0,7 μον.)
- (β) Έστω ένας  $5 \times 5$  κανονικός πίνακας  $A$ , με φάσμα  $\sigma(A) = \{0, 6, 8, -5 + 2i, -5 - i\}$ . Με βάση τη νόρμα  $\|\cdot\|_2$ , υπολογίστε την απόσταση του  $A$  από τους πλησιέστερους του  $5 \times 5$  πίνακες που έχουν τουλάχιστον μια πολλαπλή ιδιοτιμή και την απόσταση του  $A$  από τους πλησιέστερους του  $5 \times 5$  πίνακες που έχουν τουλάχιστον δύο πολλαπλές ιδιοτιμές. Κατασκευάστε έναν από τους πλησιέστερους στον  $A$  πίνακες για κάθε μια από τις παραπάνω αποστάσεις. (2 μον.)