



Επαναληπτική εξέταση του μαθήματος **ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΙΝΑΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ**
της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Επιστημών

13 - 09 - 2017

ΘΕΜΑ 1 (0,6+0,7+1,2 = 2,5 μον.)

- (α) Να αποδείξετε ότι η νόρμα πινάκων μεγίστου αθροίσματος κατά στήλη $\| \circ \|_1$ επάγεται από τη διανυσματική l_1 νόρμα.
- (β) Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ με αντierremitτιανό μέρος $S(A) = (A - A^*)/2$. Να αποδείξετε ότι ο $S(A)$ είναι ένας από τους πλησιέστερους στον A αντierremitτιανούς πίνακες, ως προς τη νόρμα Frobenius.
- (γ) Έστω ένας τυχαίος πίνακας $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, και $D(A) = \text{diag} \{a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}\}$ ο διαγώνιος πίνακας που έχει ως κύρια διαγώνιο τη διαγώνιο του A . Να αποδείξετε ότι $\|D_A\|_2 \leq \|A\|_2$.

ΘΕΜΑ 2 (1+1 = 2 μον.)

- (α) Να αποδείξετε ότι ένας τετραγωνικός πίνακας A είναι κανονικός αν και μόνο αν το ερμιτιανό και αντierremitτιανό του μέρος, $H(A)$ και $S(A)$, έχουν ακριβώς τα ίδια ιδιοδιανύσματα.

- (β) Κατασκευάστε έναν πλησιέστερο προς τον $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ κανονικό πίνακα, ως προς την

απομάκρυνση Henrici με νόρμα Frobenius. Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

ΘΕΜΑ 3 (2,5 μον.)

Να κατασκευάσετε πλήρως μια παραγοντοποίηση ιδιαζουσών τιμών (SVD) για τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \text{ και να υπολογίσετε τον ψευδοαντίστροφο του } A.$$

ΘΕΜΑ 4 (1+2=3 μον.)

- (α) Έστω ένας $n \times n$ πίνακας A με φάσμα $\sigma(A)$, και μια νόρμα πινάκων $\| \circ \|$. Αν $\tilde{A} = A + E$ είναι μια διαταραχή του A και $\tilde{\lambda} \in \sigma(\tilde{A}) \setminus \sigma(A)$, να αποδείξετε ότι $\frac{1}{\|(A - \tilde{\lambda}I)^{-1}\|} \leq \|E\|$.

- (β) Έστω ένας 5×5 κανονικός πίνακας A , με φάσμα $\sigma(A) = \{0, -15, -18, 5 + 3i, 5 - 3i\}$. Με βάση τη νόρμα $\| \circ \|_2$, υπολογίστε την απόσταση του A από τους πλησιέστερους του 5×5 πίνακες που έχουν τουλάχιστον μια πολλαπλή ιδιοτιμή και την απόσταση του A από τους πλησιέστερους του 5×5 πίνακες που έχουν τουλάχιστον δύο πολλαπλές ιδιοτιμές. Κατασκευάστε έναν από τους πλησιέστερους στον A πίνακες για κάθε μια από τις παραπάνω αποστάσεις.