ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
Τομέας Μαθηματικών
Πολυτεχνειούπολη – Ζωγράφου ΑΘΗΝΑ - 157 80
ΤΗΛ. : 772 1774
FAX : 772 1775

ΕΞΕΤΑΣΗ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2019

Θέμα 1º :α) Να λυθεί το πρόβλημα:

$$\frac{1}{2x}u_x(x,y)+y^2u_y(x,y)=0,\quad u(0,y)=y.$$ (Μονάδες: 1.25)

β) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών

$$u_t(x,t)=c^2u_{xx}(x,t),\ 0<x<5,\ t>0$$

$$u(0,t)=u(5,t)=0, t>0,\quad u(x,0)=-8\sin(2\pi x/5)+\sin(\pi x), 0<x<5.$$

(Μονάδα 1)

γ) Να προσδιοριστεί ο τύπος της γραμμικής μ.δ.ε.

$$x^2u_{xx}+yu_{xy}+u_{yy}+u_x+u_y-u=0.$$ (Μονάδες: 0.25)

Θέμα 2º :

α) Να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$\Delta u(r,\theta)=0,\ 0\le r<2, 0\le\theta<2\pi$$

$$u(2,\theta)=1+\cos(2\theta)+\cos(4\theta)$$

Ποια είναι η μέγιστη τιμή της $u(r,\theta)$ στο πεδίο ορισμού της; (Μονάδες: 1.5)

(Δίνεται ο διαφορικός τελεστής του Laplace σε πολικές συντ.: $\Delta u(r,\theta)=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$*)*

β) Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$\Delta u(r,\theta,\varphi)=0,\ 0\le r<1, 0\le\theta\le\pi, 0\le\varphi<2\pi$$

$$u(1,\theta,\varphi)=4+\cos\theta+\cos^2\theta, 0\le\theta\le\pi, 0\le\varphi<2\pi,$$

Ποιό είναι το όριο της λύσης καθώς $r\to 0+$; (Μονάδα 1)

(Δίνονται τα πολυώνυμα Legendre $P_0(x)=1, P_1(x)=x, P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),\ldots$*)*

Θέμα 3º: Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών

$$u_{tt}(x,t)=u_{xx}(x,t)-x\cos t,\qquad 0<x<\pi,\ \ t>0$$

$$u(0,t)=0,\ \ u_x(\pi,t)=\cos t\,,\quad t\ge 0$$

$$u(x,0)=x,\ \ u_t(x,0)=\sin\left(\frac{x}{2}\right),\quad 0<x<\pi$$ (Μονάδες: 2.5)

Θέμα 4º : Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών

$$u_t(x,t)=u_{xx}(x,t)-2\sin t\, e^{-x},\qquad x>0,\ \ t>0$$

$$u_x(0,t)=-\sin t-\cos t\,,\quad t\ge 0$$

$$u(x,0)=\ e^{-x},\quad x>0$$ (Μονάδες: 2.5)