



Θέμα 1^ο: α) Δώστε τη γενική μορφή και ένα παράδειγμα μιας ημιγραμμικής διαφορικής εξίσωσης 2^{ης} τάξης με $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. (μον. 0.25)

β) Να προσδιοριστεί ο τύπος της εξίσωσης

$$x_1 u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + (1 - x_1^2) u_{x_1 x_3} + u_{x_1} + 4x_1 u_{x_2} = 0, u = u(x_1, x_2, x_3)$$

$$u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + x_2 u_{x_1 x_2} + x_2 u_{x_2} = 0, u = u(x_1, x_2)$$

(μον. 0.5)

γ) Να λυθεί η διαφορική εξίσωση και να σχολιασθεί η μορφή της λύσης (μον. 0.25)

$$u_{x_1 x_2}(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Θέμα 2^ο: α) Να δειχθεί ότι το πρόβλημα $\Delta u(x) = f(x), x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N, \frac{\partial u(x)}{\partial \eta} = \varphi(x), x \in \partial\Omega,$

$u \in C^2(\Omega \cup \partial\Omega), \Omega$ φραγμένος τόπος, με λείο σύνορο, αν επιλύεται, είναι μοναδικά επιλύσιμο συν μία προσθετική σταθερά. Διατυπώστε αρχικά τη συνθήκη επιλυσιμότητας. (Υπόδειξη: Δίνεται η

$$\text{πρώτη ταυτότητα του Green } \int_{\Omega} v \Delta u dx = - \int_{\Omega} \sum_i v_{x_i} u_{x_i} dx + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \eta} ds). \quad (\text{μον. 1.5})$$

β) Να δοθεί η μορφή της λύσης του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\Delta u(x_1, x_2) = 12, (x_1, x_2) \in (0, 3) \times (0, 2), u(0, x_2) = 4x_2^2, u(3, x_2) = 2x_2, u(x_1, 0) = u(x_1, 2) = 0. \text{Να}$$

δικαιολογηθεί πλήρως η διαδικασία. (μον.1)

γ) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών:

$$\Delta u(\rho, \varphi, t) = u_{tt}, 0 \leq \rho < 2, 0 \leq \varphi < 2\pi, t > 0, u(2, \varphi, t) = 0, u(\rho, \varphi, 0) = J_5\left(\frac{\mu_{54}\rho}{2}\right) \cos 5\varphi, u_t(\rho, \varphi, 0) = 0$$

$$\text{Δίνεται ο τελεστής Laplace σε πολικές συντεταγμένες } \Delta u(\rho, \varphi) = u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_{\rho} + \frac{1}{\rho^2} u_{\varphi\varphi}$$

(μον. 1.5)

Θέμα 3^ο: α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος Sturm-Liouville $y''(x) + \lambda y(x) = 0, x \in (0, \pi)$ με $y(0) - y'(0) = y(\pi) - y'(\pi) = 0$. (μον. 1)

β) Έστω το πρόβλημα $y''(x) + y(x) = \sin x - b \cos x, x \in (0, \pi)$ (με $y(0) - y'(0) = y(\pi) - y'(\pi) = 0$), όπου b παράμετρος. Να εξετάσετε για ποιά τιμή της παραμέτρου b το πρόβλημα αυτό είναι επιλύσιμο και τότε να το επιλύσετε. (μον.1.5)

Θέμα 4^ο: Να προσδιορίσετε τη λύση του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = H(t - |x|), x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, x \in \mathbb{R},$$

όπου H η συνάρτηση Heaviside.

(μον. 2.5)