ΜΑΘΗΜΑ: «ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ ΙΙ», ΣΕΜΦΕ-ΕΜΠ, ΑΚΑΔ. ΕΤΟΣ 2016-2017
ΕΠΙ ΠΤΥΧΙΩ ΕΞΕΤΑΣΗ 4/7/2017, ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Λ. ΤΣΕΤΣΕΡΗΣ

***Επιλέξτε 3 από τα παρακάτω 4 θέματα.*** **Όλα τα θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα. Δεν επιτρέπεται η χρήση κινητού τηλεφώνου ή οποιασδήποτε άλλης ηλεκτρονικής συσκευής. Η εξέταση πραγματοποιείται με κλειστά βιβλία/σημειώσεις. Διάρκεια: 2 ώρες**

**Θέμα 1ο: (α) (11 μονάδες)** Δείξτε την σχέση μετάθεσης $[x, p_x]=i\hbar$ για κάθε παραγωγίσιμη κυματοσυνάρτηση $\psi(x)$. Βρείτε επίσης τον μεταθέτη $[x, p_y]$, όπου $p_y$ η *y*-συνιστώσα της ορμής. **(β) (11 μονάδες)** Με βάση τον ορισμό $L_z=x\,p_y-y\,p_x, L_x=y\,p_z-z\,p_y, L_y=z\,p_x-x\,p_z$ για τις συνιστώσες του τελεστή της τροχιακής στροφορμής, βρείτε τους μεταθέτες $[L_x, L_y], [L_y, L_z], [L_z, L_x]$. **(γ) (11 μονάδες)** Δείξτε ότι το φυσικό μέγεθος $L^2=L_x^2+L_y^2+L_z^2$ μπορεί να μετρηθεί ταυτόχρονα (με απόλυτη ακρίβεια) με το μέγεθος $L_z$.

---

**Θέμα 2ο:** Η Χαμιλτονιανή αρμονικού ταλαντωτή στο σύστημα φυσικών μονάδων $\hbar=m=\omega=1$ γράφεται ως $H_0=(x^2+p^2)/2$. **(α) (9 μονάδες)** Επαληθεύστε ότι η κυματοσυνάρτηση $\psi_0(x)=N\,e^{-x^2/2}$ είναι η ιδιοσυνάρτηση της βασικής κατάστασης της $H_0$ και βρείτε τον συντελεστή κανονικοποίησης *N*. **(β) (12 μονάδες)** Βρείτε την κανονικοποιημένη ιδιοσυνάρτηση $\psi_1(x)$ για την πρώτη διεγερμένη στάθμη του κβαντικού αρμονικού ταλαντωτή. **(γ) (12 μονάδες)** Έστω ότι στην $H_0$ προστίθεται η διαταραχή $\Delta H=a\,x$, όπου $a$ σταθερά με κατάλληλες φυσικές διαστάσεις. Χρησιμοποιήστε θεωρία διαταραχών πρώτης και δεύτερης τάξης για να βρείτε την αλλαγή στην ενέργεια της $\psi_0(x)$.

---

**Θέμα 3ο:** Σωματίδιο με σπιν *S* = 1/2 και μαγνητική ροπή $\boldsymbol{\mu}=\gamma\,\boldsymbol{S}$, όπου $\gamma$ σταθερά, βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}=B\hat{z}$ με Χαμιλτονιανή $H=-\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B}$. Την στιγμή *t* = 0 το σωματίδιο είναι στην κατάσταση $|X(t=0)\rangle=N\begin{bmatrix}1+2i\\2\end{bmatrix}$, όπου *N* σταθερά και $S_z\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$. .

**(α) (9 μονάδες)** Αν τη στιγμή *t* = 0 γίνει μέτρηση της ενέργειας, ποιες είναι οι δυνατές τιμές της μέτρησης και οι αντίστοιχες πιθανότητες; **(β) (8 μονάδες)** Να βρεθεί η κατάσταση $|X(t)\rangle$ του σωματιδίου την στιγμή *t* > 0. **(γ) (8 μονάδες)** Αν την στιγμή *t* > 0 γίνει μέτρηση της ενέργειας σε ένα σύστημα με $N_\sigma \gg 1)$ τέτοια σωματίδια που βρίσκονται στην κατάσταση $|X(t)\rangle$, ποιο θα είναι το αποτέλεσμα της μέτρησης; **(δ) (8 μονάδες)** Το ίδιο ερώτημα με το (γ) αν γίνει μέτρηση του μεγέθους $S_z$ την στιγμή *t* > 0.

**Θέμα 4ο**: Έστω ότι $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{S}_2$, όπου $\boldsymbol{S}_1$ και $\boldsymbol{S}_2$ είναι οι διανυσματικοί τελεστές σπιν με $S_1=1, S_2=1/2$ για $\hbar=1$.

**(α) (9 μονάδες)** Εκφράστε το άθροισμα $S_{1x}S_{2x}+S_{1y}S_{2y}$ συναρτήσει των τελεστών αναβίβασης $S_{1+}, S_{2+}$ και καταβίβασης $S_{1-}, S_{2-}$. **(β) (12 μονάδες)** Δείξτε ότι μία κοινή ιδιοκατάσταση των $S^2$ και $S_z$ είναι η $X_1(1,1)X_2(1/2,1/2)$, όπου $X_1(1,1)$ είναι ιδιοκατάσταση των $S_1^2$ και $S_{1z}$ με κβαντικούς αριθμούς $S_1=1, S_{1z}=1$, ενώ $X_2(1/2,1/2)$ είναι ιδιοκατάσταση των $S_2^2$ και $S_{2z}$ με κβαντικούς αριθμούς $S_2=1/2, S_{2z}=1/2$. **(γ) (12 μονάδες)** Βρείτε τις ιδιοενέργειες της Χαμιλτονιανής $H=\lambda \boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2$, όπου $\lambda$ είναι σταθερά με κατάλληλες φυσικές διαστάσεις. Υπάρχει εκφυλισμός;

**(Ενδεχομένως) χρήσιμες σχέσεις (το σύμβολο + στον εκθέτη δηλώνει το dagger)**

Μεταθέτης: $[A,B]=AB-BA$. Ιδιότητες $[A,B+C]=[A,B]+[A,C]$.
$[A,BC]=B[A,C]+[A,B]C$, $[AB,C]=A[B,C]+[A,C]B$.

Εξ. Schroedinger: $H\psi=i\hbar\dfrac{\partial\psi}{\partial t}$. Ορμή: $p=-i\hbar\dfrac{d}{dx}, \boldsymbol{p}=-i\hbar\nabla. [x,p]=i\hbar$.

Φορμαλισμός Dirac: $\langle\psi|A|\varphi\rangle=(\psi,A\varphi)=\int\psi^* A\varphi\, dx, \langle\psi|A|\varphi\rangle=\langle A^+\psi|\varphi\rangle. A_{ij}=\langle\psi_i|A|\psi_j\rangle$.
Έστω $A|\psi_n\rangle=a_n|\psi_n\rangle$ με $A=A^+. |\psi\rangle=\sum_n c_n|\psi_n\rangle, c_n=\langle\psi_n|\psi\rangle. \sum_n|\psi_n\rangle\langle\psi_n|=\boldsymbol{I}. \langle\psi_i|\psi_j\rangle=\delta_{ij}$.

Χρονική εξέλιξη: $U(\delta t)=e^{-iH\delta t/\hbar}$. Ρεύμα πιθανότητας: $\boldsymbol{j}=\hbar[\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*]/2mi$.

Αρχή αβεβαιότητας $\Delta A\,\Delta B\geq\dfrac{1}{2}|\langle[A,B]\rangle|, \Delta A=\sqrt{\langle A^2\rangle-\langle A\rangle^2}. \langle A\rangle=\langle\psi|A|\psi\rangle$.

Ανάπτυγμα Taylor: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}\left[\dfrac{d^n f}{dx^n}\right]_{x_0}(x-x_0)^n$. Ολοκλήρωμα: $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2}dx=\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}$.

Ταλαντωτής: $a=\sqrt{\dfrac{m\omega}{2\hbar}}\left(x+\dfrac{ip}{m\omega}\right). E_n=\hbar\omega\left(n+\dfrac{1}{2}\right). a|n\rangle=\sqrt{n}|n-1\rangle, a^+|n\rangle=\sqrt{n+1}|n+1\rangle$.

Στροφορμή: $[J_x,J_y]=i\hbar J_z$(+ κυκλική εναλλαγή)$. J^2|j\mu\rangle=j(j+1)\hbar^2|j\mu\rangle, J_z|j\mu\rangle=\mu\hbar|j\mu\rangle$.
$J_+=J_x+iJ_y, J_-=J_+^+, J_+|j\mu\rangle=\hbar\sqrt{j(j+1)-\mu(\mu+1)}|j,\mu+1\rangle$,
$J_-|j\mu\rangle=\hbar\sqrt{j(j+1)-\mu(\mu-1)}|j,\mu-1\rangle$. Αν $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}_1+\boldsymbol{J}_2$, τότε $j_{max}=j_1+j_2, j_{min}=|j_1-j_2|$.
$L^2Y_l^m=l(l+1)\hbar^2Y_l^m, L_zY_l^m=m\hbar Y_l^m. L_z=-i\hbar\dfrac{\partial}{\partial\varphi}, L^2=-\hbar^2\left(\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta}+\dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)$.

Σφαιρικές συντεταγμένες: $d\Omega=\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$. Τύποι Euler: $2\cos\varphi=e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}, 2i\sin\varphi=e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}$.

Σφαιρικές αρμονικές: $Y_0^0(\theta,\varphi)=\dfrac{1}{\sqrt{4\pi}}, Y_1^{\pm1}(\theta,\varphi)=\mp\sqrt{\dfrac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{\pm i\varphi}, Y_1^0(\theta,\varphi)=\sqrt{\dfrac{3}{4\pi}}\cos\theta$,

Αδιατάρακτη $H_0|n\rangle=E_n^{(0)}|n\rangle$, διαταραχή $V:\delta E_n^{(1)}=\langle n|V|n\rangle, \delta E_n^{(2)}=\sum_{m\neq n}\dfrac{|\langle m|V|n\rangle|^2}{E_n^{(0)}-E_m^{(0)}}$,
$|\delta\psi_n^{(1)}\rangle=\sum_{m\neq n}c_m|m\rangle, c_m=\langle m|V|n\rangle/(E_n^{(0)}-E_m^{(0)})$. Εκφυλισμός: διαγωνοποίηση της $V$.