ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ (Επαναληπτική, Σεπτέμβριος 2017)

ΕΜΠ - Τομέας Φυσικής - ΣΕΜΦΕ, Αναπλ. Καθ. Γ. Βαρελογιάννης

Μέρος Α:

Α.1:

α) Να γράψετε συνοπτικά το θεώρημα *Liouville*. Πως αυτό συμβάλλει στην ισχύ της στατιστικής ανάλυσης **εργοδικών** συστημάτων ;

β) Να γράψετε συνοπτικά το Αξίωμα $Boltzmann - Gibbs$. Πως αυτό επιβάλλει τους πολλαπλασιαστές *Lagrange* στη στατιστική ανάλυση ;

Α.2: Ενα **κλασσικό ιδανικό αέριο** Ν σωματιδίων σε τρισδιάστατο δοχείο όγκου V έχει συνάρτηση επιμερισμού $Z = (1/N!)(V/\lambda^3)^N$ όπου $\lambda = \sqrt{(2\pi\hbar^2)/(mkT)}$.

α) Γιατί υπάρχει ο συντελεστής $1/N!$;

β) Τί είναι το λ και ποιά η σημασία του πηλίκου $N\lambda^3/V$ **για την ισχύ της κλασσικής προσέγγισης** ;

γ) Τι αναπαριστά το θεώρημα **ισοκατανομής** που συναντάμε στην περιγραφή ενός κλασσικού ιδανικού αερίου. Υπάρχει ένα πιο γενικό ανάλογο θεώρημα σε κβαντικά συστήματα ;

Α.3:

α) Να γράψετε τηλεγραφικά τα αξιώματα της κβαντομηχανικής.

β) Να δείξετε ότι για ένα ερμιτιανό τελεστή $\widehat{A}$ ισχύουν για **καθαρές καταστάσεις** οι σχέσεις $\langle\widehat{A}\rangle = \langle\Psi|\widehat{A}|\Psi\rangle = Tr\{\widehat{\rho}\widehat{A}\}$. Τι αλλάζει στην περίπτωση **στατιστικού μείγματος** κβαντικών καταστάσεων.

γ) Στην περίπτωση **στατιστικού μείγματος** δείξτε ότι $Tr\{\widehat{\rho}^2\} < 1$. Δώστε την εντροπία του συστήματος συναρτήσει του $\widehat{\rho}$ σχολιάζοντας το πρόσημο στη σχέση αυτή. Μπορούν διαφορετικά στατιστικά μείγματα να οδηγούν στην ίδια μέση τιμή $\langle\widehat{A}\rangle$; (αν ναί δώστε ένα παράδειγμα).

Α.4: Για ένα σύστημα σε ισορροπία με στατιστικούς περιορισμούς στις ποσότητες $\widehat{X}_i$:

α) Αποδείξτε ότι $dS = k\sum_i \lambda_i d\langle\widehat{X}_i\rangle$. Να δείξετε πώς από τη σχέση αυτή εξηγείται ο **εντατικός** (όχι προσθετικός) χαρακτήρας των ποσοτήτων **θερμοκρασία**, **χημικό δυναμικό** και **πίεση**, που συναντάμε στη θερμοδυναμική.

β) Να αποδείξετε ότι για τον υπολογισμό της **μέσης τιμής** κάποιων συγκεκριμένων ποσοτήτων (που θα προσδιορίσετε) δεν είναι απαραίτητος ο τελεστής πυκνότητας αλλά αρκεί η **συνάρτηση επιμερισμού**.

Α.5: Σε τι διαφέρουν μια προσέγγιση **μέσου πεδίου** τύπου *Landau* με μια προσέγγιση μέσου πεδίου τύπου *Weiss* και σε τι συμπίπτουν ;

Μέρος Β:

Β.1: Σύστημα αποτελείται απο δύο ανεξάρτητα **διακριτά ανεξάρτητα** σωματίδια, A και B. Για τις αντίστοιχες χαμιλτονιανές ισχύει: $\widehat{H}_{A(B)}|u_{1,2}^{A(B)}\rangle = E_{1,2}^{A(B)}|u_{1,2}^{A(B)}\rangle$.
α) Γιατί τα $\left\{|u_1^{A(B)}\rangle, |u_2^{A(B)}\rangle\right\}$ είναι βάσεις στους $\mathcal{E}_A$ και $\mathcal{E}_B$ αντίστοιχα ;
β) Αν το σύστημα βρίσκεται στην $|u_1^A, u_1^B\rangle$ να βρεθούν **Τελεστής Πυκνότητας**, **Εντροπία** και **Εσωτερική Ενέργεια**.
γ) Τα ίδια αν βρίσκεται στο **Στατιστικό Μείγμα** $|u_1^A, u_1^B\rangle$ (Πιθανότητα 1/2) και $\frac{|u_1^A,u_2^B\rangle+|u_2^A,u_1^B\rangle}{\sqrt{2}}$ (Πιθανότητα 1/2).
δ) Τα ίδια αν βρίσκεται σε επαφή με **δοχείο θερμότητας** θερμοκρασίας T.

Β.2: Εστω τελεστής $\widehat{G}_{A(B)}$ ο οποίος δρά στους χώρους $\mathcal{E}_A$ και $\mathcal{E}_B$ αντίστοιχα τέτοιος ώστε $\widehat{G}_A(B)|u_1^{A(B)}\rangle = |u_2^{A(B)}\rangle$ και $\widehat{G}_A(B)|u_2^{A(B)}\rangle = |u_1^{A(B)}\rangle$. Να βρείτε τις μέσες τιμές των $\langle\widehat{G}_A\rangle$ και $\langle\widehat{G}_A+\widehat{G}_B\rangle$ σε καθεμιά από τις περιπτώσεις **β)**, **γ)** και **δ)** της **Β.1**:.

Β.3: Θεωρούμε τώρα ότι τα σωματίδια είναι **ταυτόσημα**. Μέτρηση της ενέργειας του κάθε σωματιδίου έδωσε ενέργειες E_1 και E_2 αντίστοιχα. Μετά τη μέτρηση να βρεθούν η εσωτερική ενέργεια και η $\langle\widehat{G}_A+\widehat{G}_B\rangle$ εάν τα σωματίδια ήταν **μποζόνια** και άν τα σωματίδια ήταν **φερμιόνια** υποθετικά χωρίς σπίν.

Μέρος Γ:

Θεωρούμε ενα **τρισδιάστατο** ισοτροπικό αρμονικό ταλαντωτή που σε πρώτη προσέγγιση μοντελλοποιεί την ασθενή αλληλεπίδραση ενός ατόμου του κρυσταλλικού πλέγματος με τα υπόλοιπα άτομα του πλέγματος σε ένα στερεό. (Δίνεται η συνάρτηση επιμερισμού για το μονοδιάστατο ταλαντωτή).
α) Να υπολογίσετε τη Συνάρτηση επιμερισμού Z
β) Να υπολογίσετε την εσωτερική ενέργεια U, πως σχετίζεται με αυτή του μονοδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή ;
γ) Να υπολογίσετε τη **θερμοχωρητικότητα** $C = dU/dT$ του πλέγματος υποθέτοντας σε πρώτη προσέγγιση ότι αποτελείται από N ανεξάρτητους τρισδιάστατους αρμονικούς ταλαντωτές όπως οι παραπάνω (προσέγγιση *Einstein*). Παίρνοντας τα όρια $T \to 0$ και $T \to \infty$ δώστε ένα διάγραμμα $C(T)$ και σχολιάστε.