ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 ώρες

Θέμα 1ο

(Α) Να δείξετε ότι οι ιδιοτιμές ενός αυτοσυζυγούς γραμμικού μετασχηματισμού $f:V\to V$ είναι πραγματικές. ***Μονάδες 1***

(Β) Να βρείτε το ορθογώνιο πίνακα P που διαγωνοποιεί το συμμετρικό πίνακα

$$A=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}, a\in\mathbb{R}\ .$$ ***Μονάδες 1,5***

Θέμα 2ο

Να βρεθεί η εξίσωση ως προς τους κύριους άξονές της και το είδος της καμπύλης με εξίσωση στο καρτεσιανό σύστημα αναφοράς Oxy:

$$2xy-2x-4y+1=0$$ ***Μονάδες 2,5***

Θέμα 3ο

(Α) Έστω τα πολυώνυμα $p(x)=x^2-8x+15$ και $q(x)=x^2-11x+28$. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει $3x3$ πίνακας A τέτοιος ώστε $p(A)=q(A)=O$. ***Μονάδες 0,7***

(Β) Έστω δύο $\nu x\nu$ πίνακες A και B. Τι συμπεραίνεται αν αυτοί οι δύο πίνακες έχουν την ίδια μορφή Jordan $J_A=J_B$; ***Μονάδες 0,8***

(Γ) Έστω δύο $\nu x\nu$ πίνακες A και B για τους οποίους ισχύει $AB=BA$. Αν ο B είναι αντιστρέψιμος και λ_0 είναι μια απλή ιδιοτιμή του A με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα x_0, να αποδείξετε ότι το x_0 είναι ιδιοδιάνυσμα και του πίνακα B. ***Μονάδες 1***

Θέμα 4ο

Έστω ο πίνακας $A(\omega)=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -\omega+3 & \omega-1 & 3 \\ -\omega-2 & \omega+2 & -1 \end{pmatrix}$, $\omega\in\mathbb{R}$. Για τις διάφορες τιμές του ω, να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του $\mathrm{A}(\omega)$. Για τις τιμές του ω για τις οποίες ο $\mathrm{A}(\omega)$ δεν διαγωνοποιείται με μετασχηματισμό ομοιότητας, να κατασκευαστεί πλήρως η κανονική μορφή Jordan του $\mathrm{A}(\omega)$ και ο αντίστοιχος πίνακας ομοιότητας.

Μονάδες 2,5

Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα.