ΜΑΘΗΜΑ: «ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ ΙΙ», ΣΕΜΦΕ-ΕΜΠ, ΑΚΑΔ. ΕΤΟΣ 2017-2018
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ 28/8/2018, ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Λ. ΤΣΕΤΣΕΡΗΣ

Επιλέξτε 3 από τα παρακάτω 4 θέματα. Όλα τα θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα. Δεν επιτρέπεται η χρήση κινητού τηλεφώνου ή οποιασδήποτε άλλης ηλεκτρονικής συσκευής. Η εξέταση πραγματοποιείται με κλειστά βιβλία/σημειώσεις. Διάρκεια: 2 ώρες

Θέμα 1°: (α) (10 μονάδες) Δείξτε το νόμο χρονικής εξέλιξης $\frac{d\langle A\rangle}{dt}=\frac{i}{\hbar}\langle [H,A]\rangle$, όπου A (χρονοανεξάρτητος) ερμιτιανός τελεστής και H η (χρονοανεξάρτητη) Χαμιλτονιανή ενός φυσικού συστήματος. **(β) (13 μονάδες)** Έστω ότι τη στιγμή $t=0$ σύστημα που έχει Χαμιλτονιανή H βρίσκεται σε ιδιοκατάσταση $|a\rangle$ του A με $A|a\rangle=a|a\rangle, a\in\mathbb{R}$. Αν ισχύει $[H,A]=c, c\in\mathbb{C}$, βρείτε την μέση τιμή και την αβεβαιότητα του A τη στιγμή $t>0$. Δείξτε τι είδους αριθμός πρέπει να είναι ο c. **(γ) (10 μονάδες)** Για την Χαμιλτονιανή $H=\lambda L_z$ (λ σταθερά), ποια από τα μεγέθη $x, L_x, L_x^2+L_y^2$ είναι αναλλοίωτα; Στα παραπάνω L_x, L_y, L_z είναι οι συνιστώσες της τροχιακής στροφορμής, x η x-συνιστώσα της θέσης.

Θέμα 2°: Η Χαμιλτονιανή αρμονικού ταλαντωτή στο σύστημα φυσικών μονάδων $\hbar=m=\omega=1$ γράφεται ως $H_0=(x^2+p^2)/2$. Έστω ότι σωματίδιο μάζας m βρίσκεται στην ιδιοκατάσταση $|n\rangle$. **(α) (8 μονάδες)** Βρείτε την μέση τιμή της θέσης του σωματιδίου μόνο με επιχειρήματα συμμετρίας (δηλαδή, χωρίς λεπτομερή υπολογισμό). **(β) (13 μονάδες)** Βρείτε την μέση τιμή και την αβεβαιότητα της ορμής του σωματιδίου. **(γ) (12 μονάδες)** Εάν τώρα υποθέσουμε ότι ο αρμονικός ταλαντωτής εκτείνεται μόνο στον θετικό ημιάξονα των x, ενώ είναι $V(x)=+\infty$ για $x<0$, βρείτε τις ιδιοενέργειες και τις ιδιοκαταστάσεις.

Θέμα 3°: Άτομο υδρογόνου τοποθετείται μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}=E\hat{\mathbf{z}}$. **(α) (11 μονάδες)** Αν το ηλεκτρικό πεδίο είναι πολύ ασθενές, βρείτε σε πρώτη προσέγγιση πως μεταβάλλεται η ενέργεια της βασικής κατάστασης του ατόμου. **(β) (22 μονάδες)** Απαντήστε στο ίδιο ερώτημα όπως το (α), αλλά για τις ιδιοενέργειες των καταστάσεων της πρώτης διεγερμένης στάθμης $(n=2)$ του ατόμου. Δίνονται οι ιδιοσυναρτήσεις του ατόμου $\psi_{2,0,0}=\frac{2}{(2a_0)^{3/2}}\left(1-\frac{r}{2a_0}\right)e^{-r/2a_0}Y_0^0(\theta,\varphi)$ και $\psi_{2,1,0}=\frac{1}{\sqrt{3}(2a_0)^{3/2}}\frac{r}{a_0}e^{-r/2a_0}Y_1^0(\theta,\varphi)$, όπου a_0 είναι η (γνωστή) ακτίνα του Bohr.

Θέμα 4ο: Δύο ηλεκτρόνια με τελεστές σπιν S_1, S_2 βρίσκονται τη στιγμή $t=0$ στην κατάσταση $|\uparrow\downarrow\rangle \stackrel{\text{def}}{=} |\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2$, όπου οι δείκτες 1 και 2 αναφέρονται στις καταστάσεις σπιν των δύο ηλεκτρονίων. Η Χαμιλτονιανή του συστήματος είναι η $H=\alpha S_z+\beta S^2$, όπου $S \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{S}_2$ και α, β σταθερές με κατάλληλες φυσικές διαστάσεις. **(α) (15 μονάδες)** Αν τη στιγμή $t=0$ μετρηθεί η ενέργεια, βρείτε τις δυνατές τιμές της μέτρησης και τις αντίστοιχες πιθανότητες. (γ) **(9 μονάδες)** Βρείτε την κατάσταση του συστήματος και την μέση τιμή της ενέργειας την χρονική στιγμή $t>0$. (γ) **(9 μονάδες)** Απαντήστε στα ίδια ερωτήματα με αυτά του (α) αν η Χαμιλτονιανή είναι η $H=\alpha S_z+\beta S^2-2\beta S_1 \cdot S_2$.

(Ενδεχομένως) χρήσιμες σχέσεις

Μεταθέτης: $[A,B]=AB-BA$. $[A,BC]=B[A,C]+[A,B]C$, $[AB,C]=A[B,C]+[A,C]B$.

Εξ. Schroedinger: $H\psi=i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$. Μεταθέτης: $[A,B]=AB-BA$. Ορμή: $p=-i\hbar\frac{d}{dx}$, $\boldsymbol{p}=-i\hbar\nabla$.

Φορμαλισμός Dirac: $\langle\psi|A|\varphi\rangle=(\psi, A\varphi)=\int\psi^* A\varphi\, dx$, $\langle\psi|A|\varphi\rangle=\langle A^\dagger\psi|\varphi\rangle$. $A_{ij}=\langle\psi_i|A|\psi_j\rangle$.

Έστω $A|\psi_n\rangle=a_n|\psi_n\rangle$ με $A=A^\dagger$. $|\psi\rangle=\sum_n c_n|\psi_n\rangle$, $c_n=\langle\psi_n|\psi\rangle$. $\sum_n|\psi_n\rangle\langle\psi_n|=\boldsymbol{I}$. $\langle\psi_i|\psi_j\rangle=\delta_{ij}$.

Χρονική εξέλιξη: $U(\delta t)=e^{-iH\delta t/\hbar}$. Ρεύμα πιθανότητας: $\boldsymbol{j}=\hbar[\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*]/2mi$.

Αρχή αβεβαιότητας $\Delta A\,\Delta B\geq\frac{1}{2}|\langle[A,B]\rangle|$, $\Delta A=\sqrt{\langle A^2\rangle-\langle A\rangle^2}$. $\langle A\rangle=\langle\psi|A|\psi\rangle$. $[x,p]=i\hbar$.

Ανάπτυγμα Taylor: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[\frac{d^n f}{dx^n}\right]_{x_0}(x-x_0)^n$. $\sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cos(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$.

Ολοκλήρωμα: $\int_0^\infty x^\lambda e^{-x}dx=\lambda!$, $\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\, d\theta=\frac{1}{2}$, τύποι Euler: $\cos\varphi=\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}$, $\sin\varphi=\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$.

Ταλαντωτής: $a=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x+\frac{ip}{m\omega}\right)$. $E_n=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$. $a|n\rangle=\sqrt{n}|n-1\rangle$, $a^\dagger|n\rangle=\sqrt{n+1}|n+1\rangle$,

$\psi_n(x)=e^{-x^2/2}H_n(x)$, $H_n(x)$: πολυώνυμο Hermite.

Στροφορμή: $[J_x,J_y]=i\hbar J_z$(+ κυκλική εναλλαγή). $J^2|j\mu\rangle=j(j+1)\hbar^2|j\mu\rangle$, $J_z|j\mu\rangle=\mu\hbar|j\mu\rangle$.

$J_+=J_x+iJ_y$, $J_-=J_+^\dagger$, $J_+|j\mu\rangle=\hbar\sqrt{j(j+1)-\mu(\mu+1)}|j,\mu+1\rangle$,

$J_-|j\mu\rangle=\hbar\sqrt{j(j+1)-\mu(\mu-1)}|j,\mu-1\rangle$. Αν $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}_1+\boldsymbol{J}_2$, τότε $j_{max}=j_1+j_2$, $j_{min}=|j_1-j_2|$.

$L^2Y_l^m=l(l+1)\hbar^2Y_l^m$, $L_zY_l^m=m\hbar Y_l^m$. $L_z=xp_y-yp_x$ (και κυκλική εναλλαγή).

Σφαιρικές συντεταγμένες: $d\Omega=\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$, $x=r\cos\varphi\sin\theta$, $y=r\sin\varphi\sin\theta$, $z=r\cos\theta$.

Σφαιρικές αρμονικές: $Y_0^0(\theta,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$, $Y_1^{\pm1}(\theta,\varphi)=\mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{\pm i\varphi}$, $Y_1^0(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$.

Αλληλεπίδραση Zeeman για e^-: $U_L=\frac{\mu_B}{\hbar}\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{B}$, ή $U_S=\frac{2\mu_B}{\hbar}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{B}$, με $\frac{\mu_B}{\hbar}\stackrel{\text{def}}{=}\frac{|e|}{2m_e}$.

Αδιατάρακτη $H_0|n\rangle=E_n^{(0)}|n\rangle$, διαταραχή V: $\delta E_n^{(1)}=\langle n|V|n\rangle$, $\delta E_n^{(2)}=\sum_{m\neq n}\frac{|\langle m|V|n\rangle|^2}{E_n^{(0)}-E_m^{(0)}}$,

$|\delta\psi_n^{(1)}\rangle=\sum_{m\neq n}c_{mn}|m\rangle$, $c_{mn}\stackrel{\text{def}}{=}\frac{\langle m|V|n\rangle}{E_n^{(0)}-E_m^{(0)}}$. Εκφυλισμός: διαγωνοποίηση της V.