Διάρκεια Εξέτασης: 2,5 ώρες

ΑΣΚΗΣΗ 1. Δίνεται ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης **P** μιας μαρκοβιανής αλυσίδας $\{X_n\}_{n\in N_0}$ στον $X=\{A, B, C\}$.

$$\boldsymbol{P}=\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ p & 1-p & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Η αλυσίδα αρχικά βρίσκεται στο A και είναι γνωστό ότι είναι χρονικά αντιστρέψιμη.

α) Να αποδείξετε ότι $p=2/3$ (10μ).

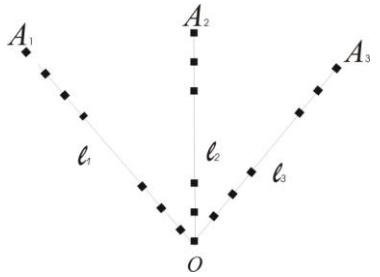
β) Να βρείτε την αναλλοίωτη κατανομή π_n της αλυσίδας (10μ).

γ) Να δείξετε ότι η κατανομή π_n της αλυσίδας μετά από n βήματα δίνεται από την (10μ),

$$\pi_n=\pi+\frac{1}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}(-2, 1, 1) \text{ για κάθε } n\in N_0.$$

δ) Αν κερδίζουμε δύο ευρώ κάθε φορά που η αλυσίδα βρίσκεται στην A και χάνουμε ένα ευρώ κάθε φορά που η αλυσίδα βρίσκεται στη B ή στη C, να υπολογίσετε το μέσο κέρδος (ή ζημιά) μας ανά βήμα σε βάθος χρόνου (5μ).

ΑΣΚΗΣΗ 2. Θεωρούμε έναν τυχαίο περίπατο στον γράφο του παρακάτω σχήματος. Ο κλάδος που συνδέει το O και το A_i, έχει ℓ_i ακμές, $i=1, 2, 3$. Ο περίπατος ξεκινά από το A_1.



α) Να εξηγήσετε γιατί η αλυσίδα έχει μοναδική αναλλοίωτη κατανομή και να την υπολογίσετε (5μ).

β) Να υπολογίσετε τον αναμενόμενο χρόνο μέχρι την πρώτη επιστροφή στο A_1 (5μ).

γ) Να υπολογίσετε τον αναμενόμενο αριθμό επισκέψεων στο O μέχρι την πρώτη επιστροφή στο A_1 (5μ).

δ) Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο περίπατος να φτάσει στο A_2 πριν φτάσει στο A_3 (10μ).

ε) Να υπολογίσετε τον αναμενόμενο αριθμό βημάτων μέχρι ο περίπατος να φτάσει στο A_2 ή στο A_3 (10μ).

ΑΣΚΗΣΗ 3. Κατά τη διάρκεια μιας εφημερίας ενός νοσοκομείου, στο Τμήμα Επειγόντων Περιστατικών (ΤΕΠ) προσέρχονται ασθενείς με παθολογικά, χειρουργικά, καρδιολογικά ή άλλα περιστατικά ως ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με ρυθμούς $\lambda_n = 1/5\,\text{min}$, $\lambda_\pi = 3/20\,\text{min}$, $\lambda_x = 1/20\,\text{min}$, $\lambda_\kappa = 1/10\,\text{min}$ αντίστοιχα.

α) Ποια κατανομή ακολουθεί το πλήθος των ασθενών που έρχονται στο ΤΕΠ κατά τη διάρκεια μιας 16ωρης εφημερίας (7μ);

β) Υπολογίστε προσεγγιστικά την πιθανότητα να προσέλθουν στην εφημερία περισσότεροι από 480 ασθενείς (7μ).

γ) Ποια είναι η πιθανότητα στα τρία πρώτα περιστατικά να υπάρχει τουλάχιστον ένα παθολογικό (7μ);

δ) Ποια κατανομή ακολουθεί ο χρόνος άφιξης του πρώτου ασθενούς (7μ);

ε) Ποια κατανομή ακολουθεί ο χρόνος άφιξης του πρώτου ασθενούς, με δεδομένο ότι στα πρώτα 10 λεπτά προσήλθαν στο ΤΕΠ 4 περιστατικά (7μ);