ΜΑΘΗΜΑ: «ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ ΙΙ», ΣΕΜΦΕ-ΕΜΠ, ΑΚΑΔ. ΕΤΟΣ 2017-2018
ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ 6/2/2018, ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Λ. ΤΣΕΤΣΕΡΗΣ

Επιλέξτε 3 από τα παρακάτω 4 θέματα. Όλα τα θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα. Δεν επιτρέπεται η χρήση κινητού τηλεφώνου ή οποιασδήποτε άλλης ηλεκτρονικής συσκευής. Η εξέταση πραγματοποιείται με κλειστά βιβλία/σημειώσεις. Διάρκεια: 2 ώρες

Θέμα 1^o: Για ελεύθερο ηλεκτρόνιο μάζας m_e που κινείται στο *xy*-επίπεδο και πάνω σε κύκλο ακτίνας a, η Χαμιλτονιανή είναι η $H_0 = \frac{p_\theta^2}{2m_e a^2}$, όπου $p_\theta = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\theta}$ είναι ο τελεστής της στροφορμής. Η κυματοσυνάρτηση είναι της μορφής $\psi(\theta)$ με θ να δηλώνει την γωνιακή θέση πάνω στον κύκλο.
(α) (8 μονάδες) Αν $\hat{\theta}$ είναι ο τελεστής της γωνίας, βρείτε τον μεταθέτη $[\hat{\theta}, p_\theta]$. Γράψτε την αντίστοιχη σχέση αβεβαιότητας. **(β) (9 μονάδες)** Βρείτε τις κανονικοποιημένες ιδιοσυναρτήσεις $\psi_m(\theta)$ και τις ιδιοτιμές του p_θ. **(γ) (8 μονάδες)** Δείξτε ότι ο τελεστής $e^{i\delta\theta\, p_\theta/\hbar}$ είναι ο τελεστής περιστροφής κατά $\delta\theta$ γύρω από τον *z*-άξονα. **(δ) (8 μονάδες)** Βρείτε τις ιδιοενέργειες και τις ιδιοσυναρτήσεις αν στο σύστημα εφαρμοστεί ομογενές μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B} = B\hat{z}$. Αγνοήστε το σπιν του ηλεκτρονίου.

Θέμα 2^o: Ηλεκτρόνιο βρίσκεται σε *p*-τροχιακό του ατόμου του υδρογόνου και έχει ενέργεια ε_p αν λάβουμε υπόψιν μόνο την έλξη Coulomb από τον πυρήνα. **(α) (12 μονάδες)** Βρείτε τις ιδιοενέργειες του *p*-ηλεκτρονίου αν συμπεριλάβουμε και την σύζευξη σπιν-τροχιάς $V_{SOC} = \lambda \mathbf{L}\cdot\mathbf{S}$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ σταθερά με κατάλληλες φυσικές διαστάσεις. **(β) (14 μονάδες)** Βρείτε δύο τουλάχιστον ιδιοκαταστάσεις που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοενέργειες του ερωτήματος (α). **(γ) (7 μονάδες)** Αν το άτομο υδρογόνου βρισκόταν μέσα σε ασθενές ομογενές μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B} = B\hat{z}$, περιγράψτε πως θα υπολογίζατε τις διορθώσεις πρώτης τάξης στις ενέργειες του ερωτήματος (α).

Θέμα 3^o: Η Χαμιλτονιανή για σωματίδιο με σπιν $1/2$ που βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B} = B\hat{n}$ (το διάνυσμα $\hat{n} = (n_x, n_y, n_z)$ δηλώνει την κατεύθυνση) είναι η $H = -\varepsilon\sigma_n$, όπου $\sigma_n = \begin{bmatrix} n_z & n_x - i n_y \\ n_x + i n_y & -n_z \end{bmatrix}$ και $\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \hbar\omega \in \mathbb{R}$ σταθερά με διαστάσεις ενέργειας. **(α) (12 μονάδες)** Αν την στιγμή $t_0 = 0$ το πεδίο έχει κατεύθυνση $\hat{n} = \hat{y}$ και το σωματίδιο είναι στην κατάσταση $X(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, βρείτε την κατάσταση την στιγμή $t_1 = \frac{\pi}{2\omega}$. **(β) (12 μονάδες)** Αν γίνει μέτρηση της ενέργειας την στιγμή t_1, ποιες είναι οι δυνατές μετρήσεις και ποια η πιθανότητα για κάθε μέτρηση;

(γ) (9 μονάδες) Έστω τώρα ότι την στιγμή t_0 εφαρμόζονται δύο μαγνητικά πεδία $\boldsymbol{B}_1 = B\hat{x}$ και $\boldsymbol{B}_2 = B\hat{y}$. Αν ένας μεγάλος αριθμός N σωματιδίων είναι τότε στην κατάσταση $X(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ και μετρηθεί η ενέργειά τους, βρείτε το συνολικό αποτέλεσμα της πολλαπλής αυτής μέτρησης.

Θέμα 4ο: **(α) (12 μονάδες)** Στην Χαμιλτονιανή $H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$ ταλαντωτή προστίθεται διαταραχή $\Delta H = \lambda_3 x^3 + \lambda_4 x^4$, όπου $\lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ σταθερές με κατάλληλες φυσικές διαστάσεις. Βρείτε την διόρθωση πρώτης τάξης στην ενέργεια της βασικής κατάστασης. **(β) (14 μονάδες)** Βρείτε την διόρθωση δεύτερης τάξης στην ενέργεια της βασικής κατάστασης αν $\lambda_4 = 0$. **(γ) (7 μονάδες)** Βρείτε την διόρθωση πρώτης τάξης για την κυματοσυνάρτηση της βασικής κατάστασης αν $\lambda_4 = 0$.

(Ενδεχομένως) χρήσιμες σχέσεις

Εξ. Schroedinger: $H\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$. Μεταθέτης: $[A, B] = AB - BA$. Ορμή: $p = -i\hbar \frac{d}{dx}$, $\boldsymbol{p} = -i\hbar \nabla$.

Φορμαλισμός Dirac: $\langle \psi | A | \varphi \rangle = (\psi, A\varphi) = \int \psi^* A\varphi \, dx$, $\langle \psi | A | \varphi \rangle = \langle A^\dagger \psi | \varphi \rangle$. $A_{ij} = \langle \psi_i | A | \psi_j \rangle$.

Έστω $A|\psi_n\rangle = a_n |\psi_n\rangle$ με $A = A^\dagger$. $|\psi\rangle = \sum_n c_n |\psi_n\rangle$, $c_n = \langle \psi_n | \psi \rangle$. $\sum_n |\psi_n\rangle\langle \psi_n| = \boldsymbol{I}$. $\langle \psi_i | \psi_j \rangle = \delta_{ij}$.

Χρονική εξέλιξη: $U(\delta t) = e^{-iH\delta t/\hbar}$. Ρεύμα πιθανότητας: $\boldsymbol{j} = \hbar [\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*]/2mi$.

Αρχή αβεβαιότητας $\Delta A \, \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|$, $\Delta A = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}$. $\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle$. $[x, p] = i\hbar$.

Ανάπτυγμα Taylor: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n f}{dx^n} \right]_{x_0} (x - x_0)^n$. $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$.

Ταλαντωτής: $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{ip}{m\omega} \right)$. $E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$. $a|n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle$, $a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$.

Στροφορμή: $[J_x, J_y] = i\hbar J_z$(+ κυκλική εναλλαγή). $J^2 |j\mu\rangle = j(j+1)\hbar^2 |j\mu\rangle$, $J_z |j\mu\rangle = \mu\hbar |j\mu\rangle$.
$J_+ = J_x + iJ_y$, $J_- = J_+^\dagger$, $J_+ |j\mu\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - \mu(\mu+1)} |j, \mu+1\rangle$,
$J_- |j\mu\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - \mu(\mu-1)} |j, \mu-1\rangle$. Αν $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_1 + \boldsymbol{J}_2$, τότε $j_{max} = j_1 + j_2$, $j_{min} = |j_1 - j_2|$.

$L^2 Y_l^m = l(l+1)\hbar^2 Y_l^m$, $L_z Y_l^m = m\hbar Y_l^m$. $L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$, $L^2 = -\hbar^2 \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)$.

Σφαιρικές συντεταγμένες: $d\Omega = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$. Τύποι Euler: $2\cos\varphi = e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}$, $2i\sin\varphi = e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}$.

Σφαιρικές αρμονικές: $Y_0^0(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$, $Y_1^{\pm 1}(\theta, \varphi) = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta \, e^{\pm i\varphi}$, $Y_1^0(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$.

Αλληλεπίδραση Zeeman για e^-: $U_L = \frac{\mu_B}{\hbar} \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{B}$, ή $U_S = \frac{2\mu_B}{\hbar} \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{B}$, με $\frac{\mu_B}{\hbar} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|e|}{2m_e}$.

Αδιατάρακτη $H_0 |n\rangle = E_n^{(0)} |n\rangle$, διαταραχή V: $\delta E_n^{(1)} = \langle n | V | n \rangle$, $\delta E_n^{(2)} = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle m | V | n \rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}$,

$|\delta \psi_n^{(1)}\rangle = \sum_{m \neq n} c_{mn} |m\rangle$, $c_{mn} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\langle m | V | n \rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}$. Εκφυλισμός: διαγωνοποίηση της V.