ΣΧΟΛΗ: Ε.Μ.Φ.Ε. ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ Ιούνιος 2018

ΘΕΜΑ 1 (2.5 μονάδες)

Τρεις αθλητές A_1, A_2 και A_3 τρέχουν σε ένα αγώνα. Συμβολίζουμε με E_{ij} το γεγονός {ο αθλητής A_i τερματίζει πριν από τον αθλητή A_j} και παρόμοια με E_{ijk} το γεγονός {ο αθλητής A_i τερματίζει πριν από τον αθλητή A_j ο οποίος τερματίζει πριν από τον αθλητή A_k}. Δίνεται ότι η $P(E_{13}) = 2/3$ και $P(E_{23}) = 1/2$ και ότι $P(E_{123}) = P(E_{132}) = x$, $P(E_{213}) = P(E_{231}) = y$, $P(E_{312}) = P(E_{321}) = z$.

(α) Να υπολογιστούν τα x, y, z. (β) Να υπολογιστεί η πιθανότητα να τερματίσει πρώτος ο αθλητής A_1. (γ) Είναι τα ενδεχόμενα E_{13} και E_{23} ανεξάρτητα?

ΘΕΜΑ 2 (2.5 μονάδες)

Εστω συνάρτηση $f(x,y)$ που ορίζεται ως

$$f(x,y) = c\left(x^2 + \frac{xy}{2}\right), 0 < x < 1, 0 < y < 2$$

η οποία είναι 0 οπουδήποτε αλλού. (α) Να βρεθεί η σταθερά c έτσι ώστε η $f(x,y)$ να είναι από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δύο τ.μ. Χ και Υ. (β) Να βρεθούν οι περιθώριες κατανομές των τ.μ. Χ και Υ. Είναι οι Χ και Υ ανεξάρτητες? (γ) Να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής της τ.μ. Υ. (δ) Να βρεθεί η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. Χ δοθέντος της Υ.

ΘΕΜΑ 3 (2.5 μονάδες)

Μία μηχανικός θέλει να συγκρίνει την πληθυσμιακή μέση τιμή του ορίου διαρροής χαλύβδινης ράβδου τύπου Α που χρησιμοποιείται στον οπλισμό σκυροδέματος με τη πληθυσμιακή μέση τιμή του ορίου διαρροής χαλύβδινης ράβδου τύπου Β. Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση του ορίου διαρροής σε ένα τυχαίο δείγμα 4 ράβδων τύπου Α βρέθηκαν 18.6 τόνοι και 1.8 τόνοι αντίστοιχα ενώ η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση του ορίου διαρροής σε ένα τυχαίο δείγμα 5 ράβδων τύπου Β βρέθηκαν 17.8 τόνοι και 2.1 τόνοι αντίστοιχα.

(α) Να βρεθεί ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για το λόγο των διασπορών των πληθυσμών. Τι συμπεραίνετε?

(β) Με βάση το συμπέρασμα του ερωτήματος (α) να ελεγχθεί η υπόθεση ότι η πληθυσμιακή μέση τιμή του ορίου διαρροής χαλύβδινης ράβδου τύπου Α είναι μεγαλύτερη από αυτή του τύπου Β. Δίνεται α=1%. Τι συμπεραίνετε?

(γ) Είναι γνωστό ότι το όριο διαρροής των χαλύβδινων ράβδων τύπου Α ακολουθεί κατανομή με μέση τιμή 17.5 τόνους και τυπική απόκλιση 2 τόνους. Είναι γνωστό επίσης ότι για να είναι αποδεκτό ένα φορτίο από ράβδους τύπου Α πρέπει να έχει μέσο όριο διαρροής τουλάχιστον 17 τόνους. Ποια η πιθανότητα ένα φορτίο από 64 ράβδους τύπου Α να είναι αποδεκτό?

ΘΕΜΑ 4 (2.5 μονάδες)

Έστω $X_1, X_2, \ldots X_n$ τυχαίο δείγμα από τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x,\gamma) = \frac{2\gamma+1}{2\gamma} x^{\frac{1}{2\gamma}}, \quad 0 \le x \le 1, \gamma > 0,$$

(α) Να βρεθεί η εκτιμήτρια μεγίστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου γ.

(β) Να βρεθεί η εκτιμήτρια μεγίστης πιθανοφάνειας της πιθανότητας $P(X \le 0.5)$.

(γ) Έστω μ η μέση τιμή της πιο πάνω κατανομής. Να δοθεί αμερόληπτη εκτιμήτρια της μέσης τιμής μ και να αποδειχθεί η αμεροληψία της.

Διωνυμικη $f(x)=\frac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x}, x=0,1,\dots,n$	$E(X)=np,\ Var(X)=np(1-p)$
Γεωμετρικη $f(x)=p(1-p)^{x-1},\ x=1,2,\dots$	$E(X)=\frac{1}{p}, Var(X)=\frac{1-p}{(p)^2}$
Poisson $f(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!},\ x=0,1,\dots$	$E(X)=\lambda, Var(X)=\lambda$
Κανονικη $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ x\in R$	$E(X)=\mu, Var(X)=\sigma^2$
Γαμμα (α,β) $f(x)=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{a-1}e^{-\beta x},\ x>0$ $\Gamma(\alpha)=(a-1)!$ για $\alpha\in Z$	$E(X)=\frac{\alpha}{\beta}, Var(X)=\frac{\alpha}{\beta^2}$
Ομοιομορφη (a,β) $f(x)=\frac{1}{\beta-a},\ a\le x\le\beta$	$E(X)=\frac{a+\beta}{2},\ Var(X)=\frac{(\beta-a)^2}{12}$
Εκθετικη $f(x)=\lambda e^{-\lambda x},\ x>0$	$E(X)=\frac{1}{\lambda}, Var(X)=\frac{1}{\lambda^2}$

$\Phi(1.96)=0.975$, $\Phi(2.33)=0.990$, $\Phi(1.645)=0.95$, $\Phi(1.29)=0.90$
$\Phi(2.5)=0.993$, $\Phi(1.5)=0.933$, $\Phi(3.99)=0.999$, $\Phi(2)=0.9772$,
$\Phi(2.44)=0.992$, $\Phi(0.5)=0.691$, $\Phi(0.125)=0.547$, $\Phi(1.89)=0.97$, $\Phi(3.46)=0.999$

$P(t_{11}>1.796)=0.05, P(t_{14}>2.624)=0.01, P(t_9>2.262)=0.025, P(t_7>1.415)=0.1$

$P(t_6>2.447)=0.025, P(t_7>2.998)=0.01, P(t_9>3.250)=0.005, P(t_8>2.306)=0.025$

$P(t_7>1.895)=0.05, P(t_{12}>2.179)=0.025, P(t_8>0.706)=0.25, P(t_{12}>2.681)=0.01$

$P(t_9>2.821)=0.01, P(t_7>2.365)=0.025, P(t_{12}>1.782)=0.05, P(t_{10}>3.169)=0.005$

$P(\chi_8^2>17.535)=0.025, P(\chi_8^2>20.09)=0.01, P(\chi_7^2>1.690)=0.975, P(\chi_{12}^2>26.22)=0.0$

$P(F_{4,3}>15.101)=0.025, P(F_{5,4}>9.364)=0.025, P(F_{5,4}>6.256)=0.05, P(F_{4,3}>9.117)=0.05$

$P(F_{3,4}>9.276)=0.05, P(F_{4,5}>1.64)=0.025, P(F_{4,5}>16.013)=0.05, P(F_{3,4}>9.979)=0.025$