ΣΧΟΛΕΣ : ΕΜΦΕ-ΗΜΜΥ **Εξέταση επί πτυχίω 2019**
ΕΞΑΜΗΝΟ : 6ο

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ

1 (40). Έστω Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n\}_{n\geq 0}$ στο σύνολο καταστάσεων $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ με πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

(α) Ταξινομήστε τις καταστάσεις σε κλάσεις επικοινωνίας. Ποιές κλάσεις είναι παροδικές και ποιές επαναληπτικές;
(β) Προσδιορίστε την περίοδο της κάθε κατάστασης.
(γ) Να βρείτε τις αναλλοίωτες κατανομές.
(δ) Αν $X_0 = 1$, να υπολογίσετε, αν υπάρχει, το όριο $\lim_n \mathbb{P}\{X_n = 5\}$.
(ε) Αν $X_0 = 1$ και T_5 είναι ο χρόνος της πρώτης άφιξης της αλυσίδας στο 5, να υπολογίσετε τις μέσες τιμές $\mathbb{E}[T_5]$ και $\mathbb{E}[z^{T_5}]$, όπου z μιγαδικός αριθμός με $|z| < 1$.
Δικαιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας.

2 (30). Ένας λαγός και μια χελώνα κάνουν τυχαίο περίπατο στο σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων αριθμών. Σε κάθε χρονική στιγμή ο λαγός κάνει ένα βήμα προς τη θετική κατεύθυνση με πιθανότητα $1/2$ ή ένα βήμα προς την αρνητική κατεύθυνση με πιθανότητα $1/2$, ενώ η χελώνα κάνει ένα βήμα προς τη θετική κατεύθυνση με πιθανότητα p ή ένα βήμα προς την αρνητική κατεύθυνση με πιθανότητα $q = 1 - p$, ανεξάρτητα από τον λαγό.
(α) Μοντελοποιήστε την από κοινού κίνηση των δύο ζώων με μια Μαρκοβιανή αλυσίδα, προσδιορίζοντας τον χώρο καταστάσεων και τις πιθανότητες μετάβασης της αλυσίδας.
(β) Έστω ότι η χελώνα ξεκινάει από το 0 και ο λαγός από τον ακέραιο $a > 0$. Να βρείτε την πιθανότητα να συναντηθούν τα δύο ζωα σε κάποια χρονική στιγμή.
Δικαιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας.

3 (30). Στο ηλεκτρονικό ταχυδρομείο ενός υπολογιστή έρχονται κακόβουλα μυνήματα όπως οι αφίξεις μιας διαδικασίας Poisson με ρυθμό ένα ανά ώρα. Τα μυνήματα αυτά ανήκουν σε τρεις κατήγορίες. Το κάθε μύνημα έχει πιθανότητα p_1 να ανήκει στην Κατηγορία Α, p_2 να ανήκει στην Κατηγορία Β και p_3 να ανήκει στην Κατηγορία Γ ($p_1 + p_2 + p_3 = 1$). Έστω T_1 ο χρόνος που πέρασε μέχρι να έρθει το πρώτο κακόβουλο μύνημα Κατηγορίας Α, από τη στιγμή που ανοίξαμε τον υπολογιστή, T_2 ο χρόνος που πέρασε μέχρι να έρθει το πρώτο κακόβουλο μύνημα Κατηγορίας Β και T_3 ο χρόνος που πέρασε μέχρι να έρθει το πρώτο κακόβουλο μύνημα Κατηγορίας Γ.
(α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα $\mathbb{P}\{T_1 < T_2\}$.
(β) Έστω T ο χρόνος που χρειάστηκε μέχρι να λάβει ο υπολογιστής κακόβουλα μυνήματα και των τριών κατηγοριών (τουλάχιστον μια φορά). Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\mathbb{E}[T]$.
Δικαιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Διάρκεια $2\frac{1}{4}\,h$