ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Επί πτυχίω εξεταστική στη Μαθηματική Ανάλυση Ι

25/5/2016

Θ1. (α') Έστω A, B μη κενά φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι $\sup A = \inf B$. Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $\alpha \in A$ και $\beta \in B$, τέτοια ώστε $\beta - \alpha < \varepsilon$. (1,2 μον.)

(β') Αν $\nu \in \mathbb{N}$, υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{1^\nu + 2^\nu + \cdots + 15^\nu}$. (1,3 μον.)

Θ2. Έστω (β_ν) πραγματική ακολουθία με $\lim_{\nu\to\infty} \beta_\nu = \beta \in \mathbb{R}$. Αν $\alpha_\nu = \beta_\nu - \beta_{\nu+1}$, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, δείξτε ότι η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει και ότι το άθροισμά της

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \beta_1 - \beta\,.$$

(1,5 μον.)

Θ3. (α') Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0\,. \end{cases}$$

Δείξτε ότι το όριο $\lim_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει. (1 μον.)

(β') Θεωρούμε τη συνάρτηση $y = \sin x$ στο διάστημα $[-\pi/2, \pi/2]$. Αν $y = \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$, είναι η αντίστροφη της $y = \sin x$, δείξτε ότι

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \quad \forall x \in (-1, 1)\,.$$

Αν $x \in (-a, a)$, $a > 0$, υπολογίστε την παράγωγο $\frac{d}{dx}(\arcsin \frac{x}{a})$. (1 μον.)

Θ4. Έστω $f(x) = x\sin(x^2)$. Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα της $y = \sin(x^2)$ σε δυναμοσειρά να υπολογιστεί η παράγωγος $f^{(15)}(0)$. (2 μον.)

Θ5. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και η συνάρτηση $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη με $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$, τέτοιο ώστε

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

<u>*Εφαρμογή*</u>. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{a\to 0}\int_0^1 \sqrt{\frac{1+a^2x^3}{2-x^2}}\,dx\,.$$

(2 μον.)

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες