ΣΗΜΜΥ
Εξέταση στη Μαθηματική Ανάλυση
Παρασκευή 1 Φεβρουαρίου 2019

Θέμα 1. *(ι) Δείξτε ότι η ακολουθία* (α_ν) *με αναγωγικό τύπο* $\alpha_{\nu+1} = \dfrac{\alpha_\nu}{1+\alpha_\nu+\alpha_\nu^2}$, $\alpha_1 > 0$ *είναι φθίνουσα, φραγμένη και βρείτε το όριο της.*
(ιι) Στη συνέχεια εξετάστε τη σύγκλιση των σειρών $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{+\infty}(-1)^\nu\frac{\alpha_\nu}{\nu}$ *και* $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{\alpha_\nu}{\nu^2}$.

Θέμα 2. *(ι) Να υπολογίσετε το όριο* $\displaystyle\lim_{\nu\to+\infty}(2+\frac{1}{\nu})^\nu$.

(ιι) Να βρείτε την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{\nu^\nu}{\nu!}x^\nu$.

Θέμα 3. *(ι) Έστω συνάρτηση* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *συνεχής με* $f(x_0)<0$, *για κάποιο* $x_0\in\mathbb{R}$. *Να δείξετε ότι υπάρχει* $\delta>0$, *τέτοιο ώστε* $f(x)<0$, *για κάθε* $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$.
(ιι) Υποθέτουμε ότι η ακολουθία (α_ν) *αποτελείται από διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με διαφορά* $\delta>0$. *Να υπολογίσετε το άθροισμα* $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{1}{\alpha_\nu\alpha_{\nu+1}}$.

Θέμα 4. *(ι) Να δείξετε ότι* $\sin x \geq x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}$, *για κάθε* $x\in[-\pi,0]$.
(ιι) Να βρεθεί η σειρά Taylor γύρω από το μηδέν, η ακτίνα σύγκλισης για την $f(x)=\displaystyle\int_0^x s^2\ln(1+s)\,ds$ *και εξετάστε τη σύγκλιση της σειράς στα* $x=\pm1$.

Θέμα 5. *Έστω ότι η συνάρτηση* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *διαθέτει συνεχή παράγωγο 4ης τάξης και* $f'(x_0)=f''(x_0)=f'''(x_0)=0$, *για κάποιο* $x_0\in\mathbb{R}$. *(ι) Δείξτε ότι αν* $f^{(4)}(x_0)>0$, *τότε η* f *παρουσιάζει στο* x_0 *τοπικό ελάχιστο.*
(ιι) Αν υπάρχει σταθερά $k>0$ *με* $f^{(4)}(x)\geq k$, *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$, *τότε να δείξετε ότι* $\displaystyle\lim_{|x|\to\infty}f(x)=+\infty$.

Θέμα 6. *(ι) Να βρείτε την τιμή* $\displaystyle\int_1^2\frac{2x^2+x+2}{x(x^2+2)}dx$.

(ιι) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int\frac{1}{2+\sin x}dx$.

Θέμα 7. *Έστω* $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ *συνεχής με* $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\alpha>0$.

(ι) Δείξτε ότι $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x)\,dx=+\infty$ *και* $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x^2}dx<+\infty$.

(ιι) Βρείτε το όριο $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(s)\,ds$.

Θέμα 8. *(ι) Δείξτε ότι υπάρχει* $\mu>0$, *τέτοιο ώστε* $\ln x\leq x^{\frac{1}{4}}$, *για κάθε* $x>\mu$.
(ιι) Εξετάστε τη σύγκλιση του οκοκληρώματος $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ *και της σειράς* $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{\ln\nu}{\nu^{\frac{3}{2}}}$.