

**ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ, Ε.Μ.Π.
ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2019 (23-01-2019)**

ΘΕΜΑ 1 (2,5 μονάδες).

- α. Να βρεθεί το επίπεδο Π_1 που είναι παράλληλο στα διανύσματα $\vec{u}_1 = (-1, 1, 2)$ και $\vec{u}_2 = (3, 0, 1)$ και περιέχει το σημείο $A(4, 0, 3)$. (0,7 μον.)
- β. Να βρεθεί η ευθεία που ορίζεται ως η τομή του επιπέδου Π_1 και του επιπέδου $\Pi_2 : x + 8y - 4z = -5$. (0,8 μον.)
- γ. Να βρεθεί η απόσταση του σημείου $B(2, 1, 1)$ από το επίπεδο Π_2 καθώς και η προβολή του B στο Π_2 . (1 μον.)

ΘΕΜΑ 2 (2,5 μονάδες)

(ι) Δίνονται οι διανυσματικοί υπόχωροι του \mathbb{R}^3

$$U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\} \text{ και } U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y = z\}.$$

- α. Να βρεθεί μια βάση για καθέναν από τους U_1 και U_2 και η διάστασή τους. (0,5 μον.)
- β. Να βρεθεί η διάσταση της τομής $U_1 \cap U_2$ και μια βάση της. (0,5 μον.)
- γ. Να βρεθεί η διάσταση του υποχωρου $U_1 + U_2$ και μια βάση του. (0,5 μον.)
- (ιι) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u}_1 = (1, 1, a)$, $\vec{u}_2 = (2, 3, 2)$ και $\vec{u}_3 = (1, 2, 3)$. Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου $a \neq 0$ ώστε η γραμμική θήκη $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \rangle$ να έχει διάσταση 2. (1 μον.)

ΘΕΜΑ 3 (2,5 μονάδες).

- α. Δίνονται A, B αντιστρέψιμοι πίνακες τάξης $n \times n$, τέτοιοι ώστε ο πίνακας $A + B^{-1}$ να είναι αντιστρέψιμος. Να δείξετε ότι ο πίνακας $A^{-1} + B$ είναι αντιστρέψιμος και ότι ισχύει: $(A^{-1} + B)^{-1} = A \cdot (A + B^{-1})^{-1} \cdot B^{-1}$ (0,5 μον.)
- β. Να λυθεί το επόμενο σύστημα γραμμικών εξισώσεων, για τις διάφορες τιμές των πραγματικών αριθμών α, β :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + \alpha y + \alpha z = \beta \\ x + \alpha^2 y + 2\alpha z = \alpha\beta \end{cases} \quad (2 \text{ μον.})$$

ΘΕΜΑ 4 (2,5 μονάδες) Δίνεται ο πίνακας $A \in M_{3 \times 3}$, τέτοιος ώστε $A =$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

α. Να βρείτε τον αντιστρέψιμο πίνακα P τέτοιον ώστε $P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$

(1 μον.)

β. Να βρείτε τον πίνακα $P^{-1} \cdot A^{-1} \cdot P$ για τον πίνακα P που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα (α). (1 μον.)

γ. Να βρείτε έναν αντιστρέψιμο πίνακα Q τέτοιον ώστε $Q^{-1} \cdot A^3 \cdot Q = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix}.$ (0,5 μον.)