

Α

ΘΕΜΑ 1^ο (Α) Δίνονται οι ευθείες

$$\varepsilon_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}, \quad \varepsilon_2 : x = y = z \text{ και το επίπεδο } \mathbb{P} : x + 2y - z - 2 = 0.$$

- (α) Να βρείτε την εξίσωση του επιπέδου Q που περνάει από το σημείο $A(3, 5, 7)$ της ευθείας ε_1 και είναι παράλληλο προς το επίπεδο Π . *Μονάδες 0,5*
- (β) Να προσδιορίσετε σημείο B της ευθείας ε_2 τέτοιο ώστε η ευθεία AB να είναι παράλληλη προς το επίπεδο Π . *Μονάδες 0, 8*
- (B) Η καμπύλη γ είναι η τομή του ελλειμοειδούς (E): $x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$ και του επιπέδου (Π): $y + \frac{z}{2} = 1$. Να βρείτε: (α) την ορθή προβολή γ_0 της καμπύλης γ στο επίπεδο $z = 0$. *Μονάδες 1,2*
- (β) τις παραμετρικές εξισώσεις της καμπύλης γ .

ΘΕΜΑ 2^ο

Έστω η γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ η οποία δίνεται από τον τύπο:

$$f(x, y, z, w) = (x + 3y + 4z - w, 3x + 2y + 7z + w, -2x + y - 3z - 2w).$$

- (1) Να βρεθεί ο πίνακας της f ως προς την κανονική βάση των \mathbb{R}^4 και \mathbb{R}^3 . *Μονάδες 0,5*
- (2) Να βρεθεί ο πίνακας της f ως προς την κανονική βάση στο πεδίο ορισμού και τη βάση $\{\varepsilon_1 = (1, 0, 0), \varepsilon_2 = (1, 1, 0), \varepsilon_3 = (1, 1, 1)\}$ στο πεδίο τιμών. *Μονάδες 0,8*
- (3) Να βρεθεί μία βάση και η διάσταση του πυρήνα $\text{Ker } f$ και της εικόνας $\text{Im } f$ της f . *Μονάδες 1,2*

Ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία του υπόχωρου $\text{Im } f$ του \mathbb{R}^3 ;

ΘΕΜΑ 3. (α) Αποδείξτε ότι η γενική λύση ενός τυχαίου ομογενούς γραμμικού συστήματος είναι διανυσματικός χώρος. *Μονάδες 0,5*

$$(\beta) \text{ Έστω το σύστημα } (\Sigma): \begin{cases} 2x - 3y + z - w = \alpha \\ x + y + z + w = \beta \\ x + 6y + 2z + 4w = \gamma \\ 5x + 10y + 6z + 8w = \delta \end{cases}$$

Βρείτε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν

τα $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ ώστε το σύστημα (Σ) να είναι συμβιβαστό. Αποδείξτε ότι το σύνολο $U = \{(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4 : \text{το } (\Sigma) \text{ είναι συμβιβαστό}\}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του \mathbb{R}^4 και κατασκευάστε μια βάση του. *Μονάδες 2,0*

ΘΕΜΑ 4. (α) Έστω τα πολώνυμα $p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 12$ και $q(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda - 10$. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει 3×3 πίνακας A ο οποίος ικανοποιεί τις σχέσεις $p(A) = 0$ και $q(A) = 0$. *Μονάδες 0,5*

(β) Βρείτε μια τιμή της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$ για την οποία ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} -a+6 & -6 & -a+2 \\ 0 & 1 & 0 \\ a-2 & 6 & a+2 \end{bmatrix}$ είναι

διαγωνοποιήσιμος με μετασχηματισμό ομοιότητας. Έπειτα, για την τιμή του a που θα βρείτε, κατασκευάστε έναν πίνακα X για τον οποίο ισχύει $X^2 = A$. *Μονάδες 2,0*

Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα.

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!