Διάρκεια εξέτασης: 1,5 h

Θέμα 1

(Α) Να αποδείξετε ότι η μικρότερη δυνατή γωνία του διανύσματος $\vec{x}=(1,3,-1,3)$ με τα διανύσματα του υποχώρου $V=\left[(1,-1,1,1),(5,1,-3,3)\right]$ είναι $\pi/4$.

Μονάδες 1,5

(Β) Να υπολογίσετε την προβολή της ευθείας $(\varepsilon):\frac{x}{2}=y-3=z-1$ πάνω στο επίπεδο $(\Pi):2x-3y-z+3=0$. Έπειτα να υπολογίσετε τη συμμετρική ευθεία της (ε) ως προς το επίπεδο (Π).

Μονάδες 2,0

(Γ) Για τις διάφορες τιμές των πραγματικών παραμέτρων α και β, να υπολογίσετε τη διάσταση του $V=\left[(1,1,1,1),(1,1,\alpha,1),(2,\beta,2\alpha,\beta),(1,\beta-1,\alpha,\beta-1)\right]$.

Μονάδες 1,5

ΘΕΜΑ 2

(Α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu x\nu$ αντιστρέψιμο πίνακα A, ισχύει $\left|adj(A)\right|=|A|^{\nu-1}$ και $adj\left(adj(A)\right)=|A|^{\nu-2}\cdot A$.

Μονάδες 1,5

(Β) Για έναν τετραγωνικό πίνακα $3x3$ ισχύει ότι $B\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\3\\3\end{bmatrix}, B\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, B\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\0\\2\end{bmatrix}$.

Να βρείτε τις ιδιοτιμές, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα B. Ο πίνακας B αντιστρέφεται; (δικαιολόγηση). Ο πίνακας B διαγωνοποιείται; (δικαιολόγηση). Αν ναι, ποια είναι η διαγωνοποιημένη του μορφή και ποιος είναι ο πίνακας που τον διαγωνοποιεί; Να υπολογίσετε τον πίνακα B.

Μονάδες 2,0

(Γ) Να προσδιορίσετε τις τιμές των πραγματικών παραμέτρων a,b για τις οποίες ο επόμενος τετραγωνικός πίνακας $6x6$ είναι αντιστρέψιμος:

Μονάδες 1,5

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 & b \\ b & a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & a & b \\ b & 0 & 0 & 0 & b & a \end{bmatrix}$$

Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα.

Καλή επιτυχία!