ΣΗΜΜΥ

Εξέταση στη Μαθηματική Ανάλυση

Παρασκευή 20 Σεπτεμβρίου 2019

Θέμα 1. *Δίνεται η ακολουθία* (α_ν) *με αναγωγικό τύπο* $\alpha_{\nu+1} = \dfrac{\alpha_\nu}{2\sqrt[\nu]{\nu} + \alpha_\nu}$, $\alpha_1 > 0$.

(ι) Δείξτε ότι η (α_ν) *είναι φθίνουσα, φραγμένη και βρείτε το όριο της.*

(ιι) Εξετάστε τη σύγκλιση της σειράς $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{+\infty} \nu^3 \alpha_\nu$.

Θέμα 2. *Έστω* (α_ν) *ακολουθία μη αρνητικών αριθμών και υποθέτουμε ότι* $\lim \alpha_\nu = \alpha > 0$.

(ι) Να δείξετε ότι $\lim \sqrt[\nu]{\alpha_\nu} = 1$.

(ιι) Να δείξετε ότι $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{+\infty} (1 + \frac{1}{\nu})^{-\nu^2} \alpha_\nu < +\infty$.

Θέμα 3. *(ι) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *είναι συνεχής και* $f(q) = 0$, *για κάθε ρητό αριθμό* q. *Δείξτε ότι* $f(x) = 0$, *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$.

(ιι) Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Υποθέτουμε ότι υπάρχει* $c > 0$ *τέτοιο ώστε*

$$|f(x) - f(y)| \le c(x-y)^2, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι η f *είναι σταθερή.*

Θέμα 4. *(ι) Να δείξετε ότι* $(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2$, *για* $\alpha > 3$, $x > -1$.

(ιι) Να βρεθεί η σειρά Taylor γύρω από το μηδέν και η ακτίνα σύγκλισης για την $f(x) = \displaystyle\int_0^x s^3 \ln(1+s)\, ds$. *Εξετάστε τη σύγκλιση της σειράς στα* $x = \pm 1$.

Θέμα 5. *(ι) Να βρείτε την τιμή* $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3 + (x+1)((1-x)^2+1)}{x^3((1-x)^2+1)} dx$.

(ιι) Δείξτε ότι $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^3 + (x+1)((1-x)^2+1)}{x^3((1-x)^2+1)} dx < +\infty$.

Θέμα 6. *(ι) Αν* $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *συνεχής και* $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, *εξετάστε το όριο* $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \int_1^{x^3} f(s)\, ds$.

(ιι) Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\tan^{-1} x$ *και εξετάστε τη σύγκλιση του ολοκληρώματος* $\displaystyle\int_1^\infty (\tan^{-1} x) \frac{1}{x}\, dx$.

<u>Να απαντήσετε σε 4 από τα 6 θέματα</u>

<u>Διάρκεια εξέτασης: 2,5 ώρες</u>