Διαφορική Γεωμετρία καμπύλων και επιφανειών

(01/2021)

Θέμα 1. *(α) Για την καμπύλη* $c : r = f(\theta), \theta \in [a, b]$ *σε πολικές συντεταγμένες με* $f \in C^1$, *δείξτε πως το μήκος της είναι* $\mathcal{L}(c) = \int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$ *(1μ)*

(β) Βρείτε τα ανώμαλα σημεία της καμπύλης $c : r(t) = \big(2\cos\theta + 3\cos(2\theta/3), 2\sin\theta - 3\sin(2\theta/3)\big), t \in [-\pi, \pi]$ *και υπολογίστε το μήκος της.* *(2μ)*

Θέμα 2. *Έστω* $\Phi_1 : f_1(u, v), (u, v) \in U, \Phi_2 : f_2(u, v), (u, v) \in U$ *δύο επιφάνειες μπαλώματα, με κοινό πεδίο ορισμού* U *το εσωτερικό του μοναδιαίου δίσκου στο επίπεδο* Oxy *με κέντρο το* $(0, 0)$. *Εξετάστε αν είναι δυνατόν να συμβαίνει:*

(α) στα $f_1(0, 0), f_2(0, 0)$ *τα πρώτα θεμελιώδη ποσά των* Φ_1, Φ_2 *να ταυτίζονται, ενώ τα δεύτερα θεμελιώδη ποσά στα ίδια σημεία να είναι* $(L = 0, M = 0, N = 1)$ *και* $(L = 3, M = 0, N = 3)$ *αντιστοίχως.* *(2μ)*

(β) τα πρώτα θεμελιώδη ποσά των Φ_1, Φ_2 *να ταυτίζονται στα* $f_1(x, y), f_2(x, y)$ *για κάθε* $(x, y) \in U$, *και τα δεύτερα θεμελιώδη ποσά στα* $f_1(0, 0), f_2(0, 0)$ *να είναι* $(L = 0, M = 0, N = 1)$ *και* $(L = 3, M = 0, N = 3)$ *αντιστοίχως.* *(2μ)*

Σε κάθε περίπτωση δικαιολογήστε την απάντησή σας, κι αν η απάντηση είναι θετική, δώστε ένα παράδειγμα.

Θέμα 3. *Έστω* $\Phi : f(u, v), (u, v) \in U$ *μια επιφάνεια μπάλωμα, με* $L = 1, M = 0, N = u^2 - 2uv + v^2 + 1$ *στο τυχαίο σημείο της* $f(u, v)$. *Δείξτε πως η* Φ *δεν μπορεί να περιέχει καμιά ευθεία γραμμή.* *(3μ)*