Σχετική κίνηση Coriolis, διατήρηση ενέργειας.

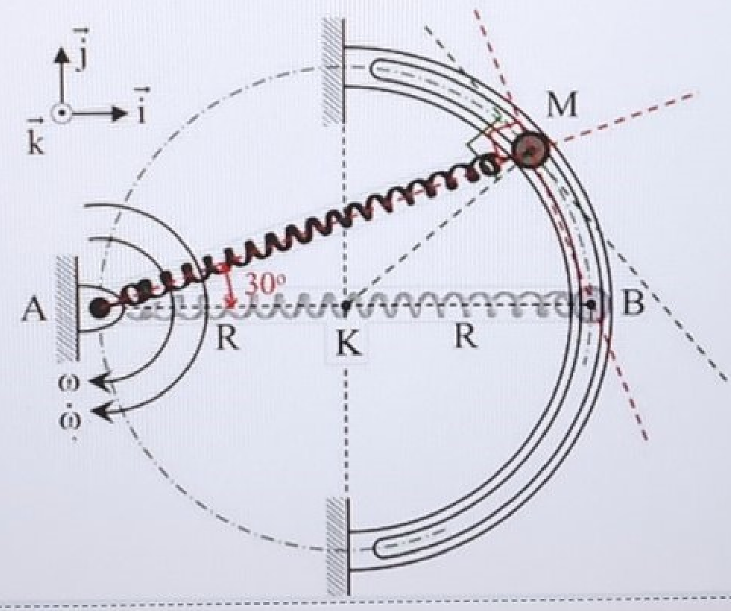
Πείρος Μ, μάζας m, ολισθαίνει χωρίς τριβή σε σχισμή σταθερού ημικυκλικού οδηγού, κέντρου Κ και ακτίνας R. Στον πείρο συνδέεται ελατήριο, φυσικού μήκους R και σταθεράς k, που αρθρώνεται στο Α, ώστε τα Α, Κ, Β να κείνται επί ευθείας.

α) Για τη χρονική στιγμή του σχήματος ($\hat{A} = 30^\circ$) και θεωρώντας γνωστές τη γωνιακή ταχύτητα ω, τη γωνιακή επιτάχυνση $\dot{\omega}$ και το μέτρο της σχετικής επιτάχυνσης $\alpha_M^{\sigma\chi\varepsilon\tau} = \dot{\omega}R - \omega^2 R\sqrt{3}$, υπολογίστε τα διανύσματα της απόλυτης ταχύτητας $\vec{\upsilon}_M^{\alpha\pi}$ και απόλυτης επιτάχυνσης $\vec{\alpha}_M^{\alpha\pi}$ του Μ **με χρήση των θεωρημάτων Coriolis**.

β) Σχεδιάστε, κατ' εκτίμηση, τα διανύσματα της απόλυτης $\vec{\upsilon}_M^{\alpha\pi}$, σχετικής $\vec{\upsilon}_M^{\sigma\chi\varepsilon\tau}$ και μετοχικής $\vec{\upsilon}_M^{\mu\varepsilon\tau}$ ταχύτητας καθώς και τα διανύσματα της απόλυτης $\vec{\alpha}_M^{\alpha\pi}$, σχετικής $\vec{\alpha}_M^{\sigma\chi\varepsilon\tau}$, μετοχικής $\vec{\alpha}_M^{\mu\varepsilon\tau}$ και Κοριολίου $\vec{\alpha}_M^{Cor}$ επιτάχυνσης.

γ) Υπολογίστε την τιμή της σταθεράς k του ελατηρίου, ώστε ο πείρος να ακινητοποιείται στο σημείο Β.

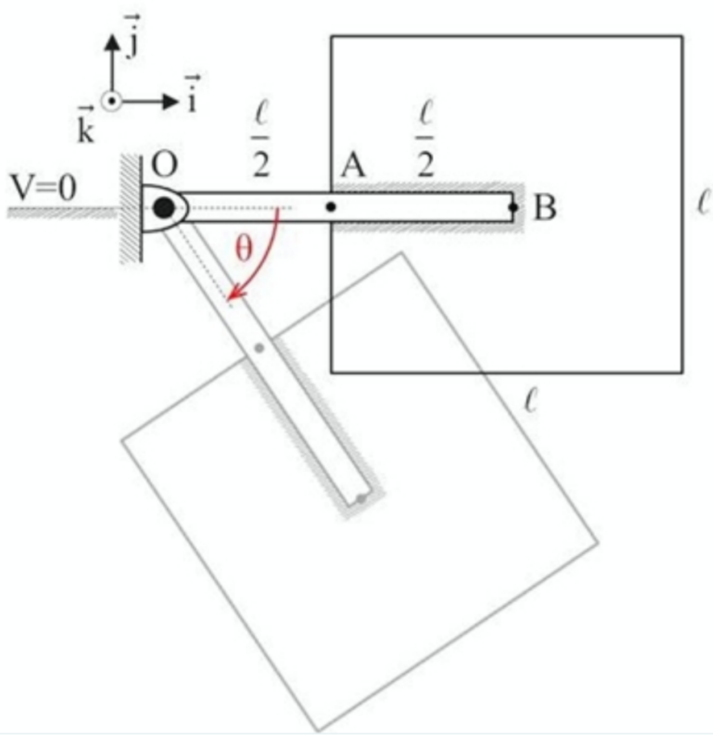
(Χρησιμοποιείστε τις βοηθητικές γραμμές του σχήματος, $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.)



Τετραγωνική πλάκα πλευράς ℓ και μάζας 2m, είναι συγκολλημένη σε λεπτομήκη ράβδο μήκους ℓ και μάζας m, που είναι αρθρωμένη στο Α. Το σύστημα αφήνεται να κινηθεί ελεύθερα υπό το βάρος του από την οριζόντια θέση (στάθμη μηδενικής δυναμικής ενέργειας), χωρίς αρχική ταχύτητα ($\omega(t=0)=\dot{\theta}(t=0)=0$).

α) **Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Lagrange**, γράψτε τη διαφορική εξίσωση κίνησης του συστήματος.

β) **Χρησιμοποιώντας την αρχή d' Alembert**, υπολογίστε τη δυναμική αντίδραση της άρθρωσης Ο για $\theta=45^\circ$ ($J_A=\dfrac{m\ell^2}{12}$, $J_B=\dfrac{(2m)\ell^2}{6}$, $\sin 45^\circ=\cos 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$).



3ο ΘΕΜΑ (35/100)

Αποσβεννύμενη ταλάντωση.

Λεπτομήκης ράβδος μήκους 2ℓ και μάζας m, στηρίζεται με άρθρωση στο κέντρο της Κ και ισορροπεί στην οριζόντια θέση. Στο ένα άκρο της συνδέεται με αποσβεστήρα γνωστής σταθεράς c, που σε περίπτωση κίνησης της ασκεί δύναμη ανάλογη της ταχύτητάς της. Στο άλλο άκρο της συνδέεται με ελατήριο γνωστής σταθεράς k, έτσι ώστε στην οριζόντια θέση ισορροπίας να έχει το φυσικό του μήκος. Λόγω μιας κρουστικής δύναμης, η ράβδος αρχίζει να εκτελεί αποσβεννύμενη ταλάντωση, με υποκρίσιμη απόσβεση, γύρω από την οριζόντια θέση ισορροπίας της με κέντρο το Κ.

α) **Με τη βοήθεια της δυναμικής εξίσωσης Euler**, γράψτε τη διαφορική εξίσωση της αποσβεννύμενης ταλάντωσης για μικρά πλάτη ταλάντωσης και υπολογίστε την περίοδο T_d της αποσβεννύμενης ταλάντωσης.

β) Αν η ταλάντωση αρχίζει από τη θέση ισορροπίας $\theta(t=0)=0$ rad, με αρχική ταχύτητα $\dot{\theta}(t=0)=\dot{\theta}_0$ rad/s, βρείτε τις εξισώσεις κίνησης $\theta(t)$, ταχύτητας $\dot{\theta}(t)$ και επιτάχυνσης $\ddot{\theta}(t)$ του συστήματος.

γ) Σε πόσο χρόνο t_* η ταλάντωση θα αποσβεστεί ολοκληρωτικά;

($J_K = \dfrac{m(2\ell)^2}{12}$.)