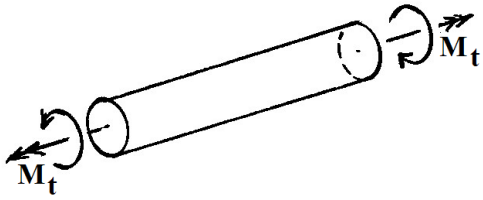
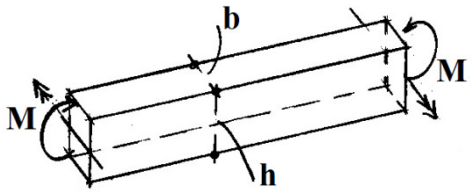
Ε.Μ.Π. – Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.
Τομέας Μηχανικής Αθήνα 17-9-2021

«Μηχανική ΙΙΙ – Αντοχή των Υλικών», Σχολή Ε.Μ.Φ.Ε., 3ο Εξάμ.

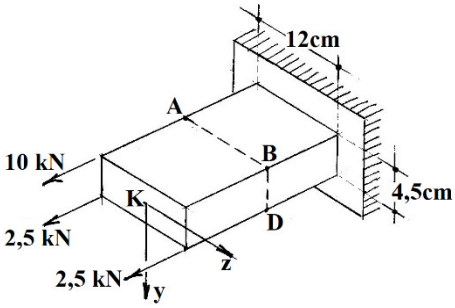
Γραπτή Εξέταση (Επαναληπτική)



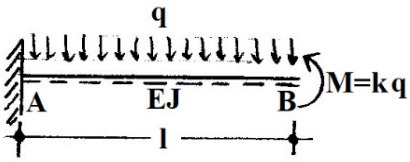
1. (2,5 μον.) Η ράβδος του σχήματος συμπαγούς κυκλικής διατομής με ακτίνα R=30mm και μήκος l=2 m, είναι κατασκευασμένη από υλικό ελαστικό–τελείως πλαστικό με τάση διαρροής τ_Y=145 MPa, μέτρο ελαστικότητας E=200 GPa και λόγο Poisson ν=0.3. Η ράβδος φορτίζεται με δύο ίσες και αντίθετες στρεπτικές ροπές $M_t=1.2\ M_{tY}$ όπου M_{tY} η ροπή στρέψης διαρροής της ράβδου. Να υπολογιστούν: **α)** η ακτίνα r_Y του ελαστικού πυρήνα και **β)** η γωνία στροφής φ των ακραίων διατομών. Μετά οι δύο στρεπτικές ροπές M_t αφαιρούνται. **γ)** Να υπολογιστεί η παραμένουσα σχετική γωνία στροφής $\varphi_{παραμ.}$ των ακραίων διατομών.



2. (2,5 μον.) Η δοκός του σχήματος συμπαγούς ορθογωνικής διατομής με πλάτος b=3cm και ύψος h=5cm, είναι κατασκευασμένη από υλικό ελαστικό–τελείως πλαστικό με τάση διαρροής σ_Y=240 MPa, μέτρο διατμήσεως G=76.92 GPa και λόγο Poisson ν=0.3. Φορτίζεται, όπως στο σχήμα, με δύο ίσες και αντίθετες καμπτικές ροπές M τέτοιες ώστε η δημιουργούμενη ακτίνα καμπυλότητας R να είναι $R=0.8R_Y$ όπου R_Y είναι η ακτίνα καμπυλότητας που δημιουργείται στην δοκό όταν ασκείται η ροπή κάμψης διαρροής M_Y. Να υπολογιστούν: **α)** το ύψος y_Y του ελαστικού πυρήνα, και **β)** η τιμή M των δύο ασκούμενων ροπών. Μετά οι δύο ροπές M αφαιρούνται. **γ)** Να υπολογιστεί η παραμένουσα ακτίνα καμπυλότητας $R_{παραμ.}$



3. (2,5 μον.) Για την φόρτιση που φαίνεται στο σχήμα να υπολογίσετε: **(α)** τις τάσεις που αναπτύσσονται στα σημεία A και B, και **(β)** τη θέση της ουδετέρας γραμμής.



4. (2,5 μον.) Ο πρόβολος του σχήματος φορτίζεται με καθολικά ομοιόμορφο κατανεμημένο φορτίο q και με συγκεντρωμένη ροπή M= k q στο άκρο B. Με χρήση του 2ου Θεωρήματος Castigliano να υπολογιστεί ο συντελεστής k ώστε η κατακόρυφη μετακίνηση δ_B του άκρου B να είναι μηδέν.

Οι εκφωνήσεις επιστρέφονται μαζί με την κόλλα.

1ο Θέμα:

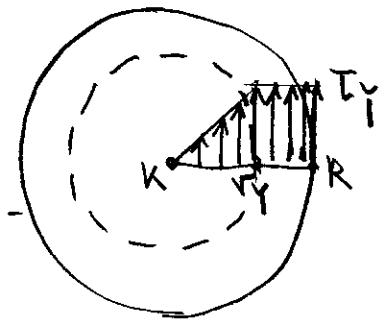
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{200}{2(1+0{,}3)} = 76{,}92 \text{ GPa}$$

$$M_{tY} = \frac{1}{2}\pi R^3 \tau_Y = \frac{1}{2}\pi\, 0{,}03^3 \cdot 145 \cdot 10^3 = 6{,}15 \text{ kNm}$$

α) Ισχύει $\overset{M_t}{M_{tEP}} = \underbrace{\frac{2}{3}\pi R^3 \tau_Y}_{\frac{4}{3}M_{tY}}\left[1 - \frac{1}{4}\left(\frac{r_Y}{R}\right)^3\right] \Rightarrow$

$$\boxed{r_Y = R\sqrt[3]{4\left(1-\frac{3}{4}\frac{M_t}{M_{tY}}\right)}} = 30\sqrt[3]{4\left(1-\frac{3}{4}1{,}2\right)} \boxed{= 22{,}10 \text{ mm}}$$

αυτόνομα εξαρτώμενο πυρήνα



β) $\gamma_Y = \frac{\tau_Y}{G} = \frac{145}{76{,}92 \cdot 10^3} = 1{,}885 \cdot 10^{-3}$

$$\theta = \frac{\gamma_Y}{r_Y} = \frac{1{,}885 \cdot 10^{-3}}{22{,}10 \cdot 10^{-3}} = 0{,}08529 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

$$\boxed{\varphi = \theta \cdot l = 0{,}08529 \cdot 2\text{m} = 0{,}171 \text{ rad} = 9{,}77^\circ}$$

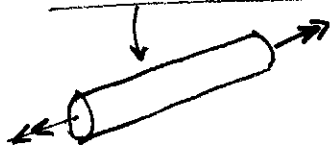
γ) $M_t = 1{,}2 \cdot M_{tY} = 1{,}2 \cdot 6{,}15 = 7{,}38$ kNm

$$J_p = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi \cdot 0{,}03^4}{2} = 1{,}272 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

$M_{t\,\alpha\nu\tau\iota\varphi} = -M_t = -7{,}38$ kNm

$$\varphi_{\alpha\nu\tau\iota\varphi} = \frac{M_{t\,\alpha\nu\tau\iota\varphi} \cdot l}{G J_p} = \frac{-7{,}38 \cdot 2}{76{,}92 \cdot 10^6 \cdot 1{,}272 \cdot 10^{-6}} = -0{,}1509 \text{ rad}$$

$$\boxed{\varphi_{\pi\alpha\rho\alpha\mu} = \varphi + \varphi_{\alpha\nu\tau\iota\varphi} = 0{,}171 - 0{,}1509 = 0{,}0201 \text{ rad} = 1{,}15^\circ}$$



2ο Θέμα:

$$G=\frac{E}{2(1+\nu)} \Rightarrow E=2G(1+\nu)=2\cdot 76{,}92\cdot 1{,}3=200\ GPa$$

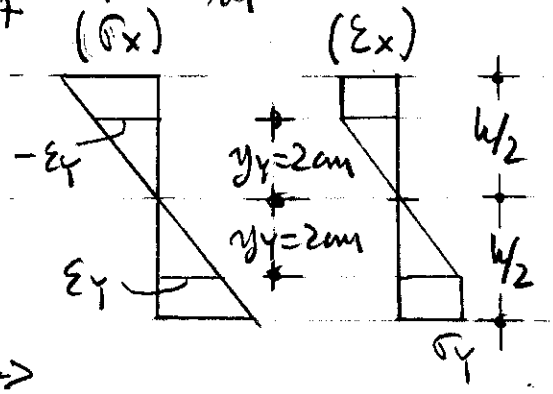
$$\varepsilon_Y=\frac{\sigma_Y}{E}=\frac{240}{200\cdot 10^3}=1{,}2\cdot 10^{-3}$$

$$J_z=\frac{bh^3}{12}=\frac{0{,}03\cdot 0{,}05^3}{12}=0{,}3125\cdot 10^{-6}\ m^4$$

$$M_Y=\frac{bh^2}{6}\sigma_Y=\frac{0{,}03\cdot 0{,}05^2}{6}\cdot 240\cdot 10^3=3\ kNm$$

$$R_Y=\frac{EJ_z}{M_Y}=\frac{200\cdot 10^6\cdot 0{,}3125\cdot 10^{-6}}{3}=20{,}833\ m$$

$$R=0{,}8\cdot R_Y=16{,}667\ m \rightarrow k=\frac{1}{R}=\frac{1}{16{,}667}=0{,}06\ \frac{rad}{m}$$



Αλλά $k=\frac{\varepsilon_Y}{y_Y} \Rightarrow$

α) $\boxed{y_Y=\frac{\varepsilon_Y}{k}=\frac{1{,}2\cdot 10^{-3}}{0{,}06}=0{,}02\ m}$

Ισχύει $M_{EP}=\underbrace{\frac{bh^2}{4}\sigma_Y}_{\frac{3}{2}M_Y}\left[1-\frac{1}{3}\left(\frac{y_Y}{h/2}\right)^2\right] \Rightarrow$

M

b) $\boxed{M=\frac{3}{2}\,3\left[1-\frac{1}{3}\left(\frac{0{,}02}{0{,}025}\right)^2\right]=3{,}54\ kNm}$

γ) $M_{\alpha\pi o\varphi}=-M=-3{,}54\ kNm$

$$k_{\alpha\pi o\varphi}=\frac{M_{\alpha\pi o\varphi}}{EJ_z}=\frac{-3{,}54}{200\cdot 10^6\ 0{,}3125\cdot 10^{-6}}=-0{,}05664\ \frac{rad}{m}$$

$$k_{\pi\alpha\rho\alpha\mu}=k+k_{\alpha\pi o\varphi}=0{,}06-0{,}05664=0{,}00336\ \frac{rad}{m}$$

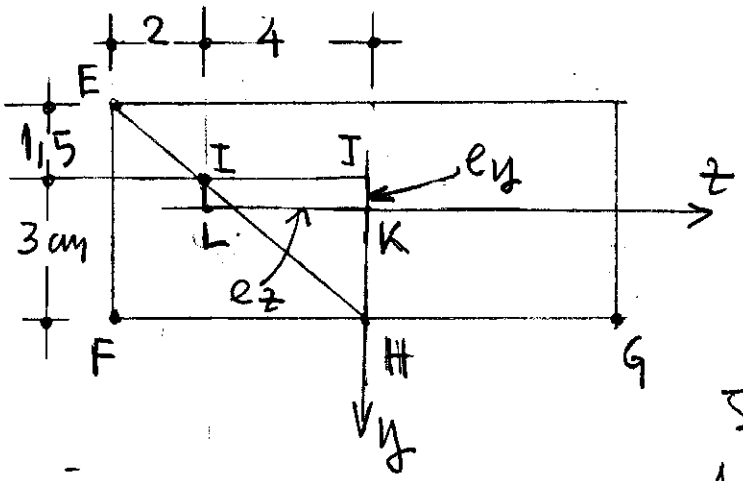
$$\boxed{R_{\pi\alpha\rho\alpha\mu}=\frac{1}{k_{\pi\alpha\rho\alpha\mu}}=297{,}6\ m}$$

3ο Θέμα: "Εκκεντρη φόρτιση Διπλής Εκκεντρότητας"

$$A = 0{,}12 \cdot 0{,}045 = 5{,}4 \cdot 10^{-3}\ m^2 \ , \quad J_y = \frac{0{,}045 \cdot 0{,}12^3}{12} = 6{,}48 \cdot 10^{-6}\ m^4$$

$$J_z = \frac{0{,}12 \cdot 0{,}045^3}{12} = 0{,}91125 \cdot 10^{-6}\ m^4$$

$$i_y^2 = \frac{J_y}{A} = 1{,}2 \cdot 10^{-3}\ m^2 \ , \quad i_z^2 = 0{,}16875 \cdot 10^{-3}\ m^2$$



Η συνισταμένη των δυνάμεων στα F και G έχει μέτρο $2 \times 2{,}5 = 5$ kN και ασκείται στο μέσον H της πλευράς FG.

Η συνισταμένη της δύναμης των 5 kN στο H και της δύναμης 10 kN στο E έχει μέτρο $5+10=15$ kN και ασκείται στο σημείο I της ευθείας EH, τέτοιο ώστε $IH \cdot 5\,kN = IE \cdot 10\,kN \Rightarrow IH/IE = 10/5 = 2$.

Αυτή είναι η ολική συνισταμένη $N = 15$ kN.

Οι εκκεντρότητες e_y, e_z της N είναι οι προβολές του I στους άξονες Ky και Kz.

Εύκολα προκύπτει ότι $e_z = -4\,cm = -0{,}04\,m$

και $e_y = \frac{4{,}5}{2} - 3 = -0{,}75\,cm = -0{,}0075\,m$

α) Έχουμε: $\sigma(y,z) = \frac{N}{A}\left(1 + \frac{e_y}{i_z^2}y + \frac{e_z}{i_y^2}z\right) \Rightarrow$

$$\sigma(y,z) = 2.778\,(1 - 44{,}44\,y - 33{,}33\,z)\ [MPa]$$

Για το $A(-0{,}0225, -0{,}06)$ προκύπτει:

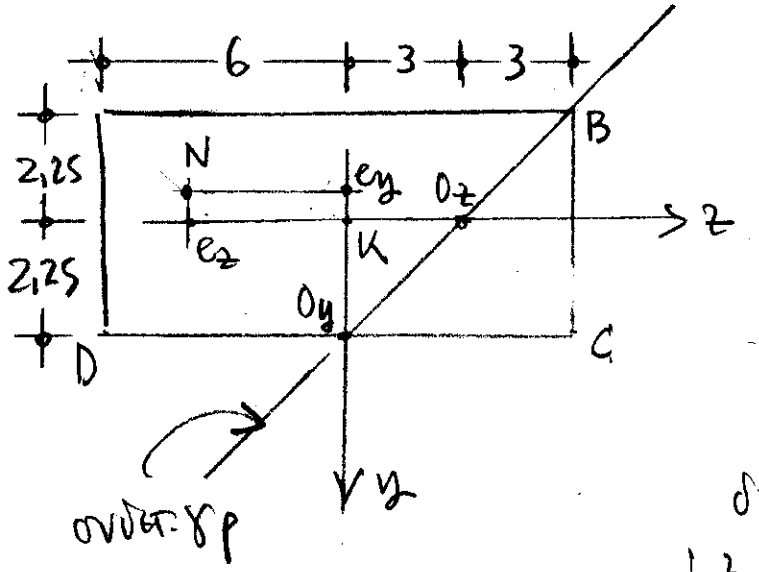
$$\boxed{\sigma_A = 2.778\,(1 + 44{,}44 \cdot 0{,}0225 + 33{,}33 \cdot 0{,}06) = 11{,}11\ MPa}$$

../..

Για το $B(-0{,}0225,\ 0{,}06)$ προκύπτει:

$$\boxed{\sigma_B = 2{,}778\,(1 + 44{,}44\cdot 0{,}0225 - 33{,}33\cdot 0{,}06) = 0}$$ δηλ. το B

βρίσκεται επί της ουδετέρας γραμμής.



β) Ξέρουμε ότι η ουδ. γρ. περνάει από τα K_y, K_z στα σημεία: O_y, O_z, άρα:

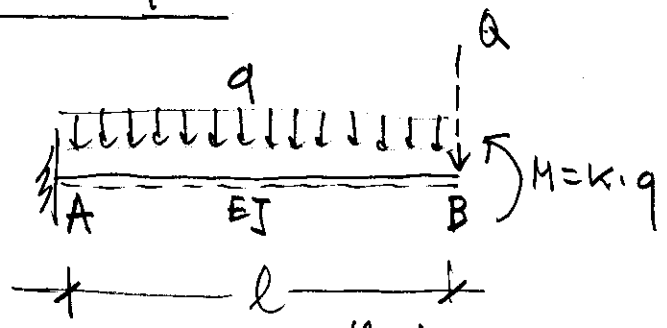
$$KO_y = -\frac{i_z^2}{e_y} = -\frac{0{,}16875\cdot 10^{-3}}{-0{,}0075} = 0{,}0225\,m = 2{,}25\,cm$$

δηλαδή στο μέσον της DC.

και $$KO_z = -\frac{i_y^2}{e_z} = -\frac{1{,}2\cdot 10^{-3}}{-0{,}04} = 0{,}03\,m = 3\,cm$$

Δηλαδή φαίνεται ότι η ουδ. γρ. διέρχεται από την κορυφή B.

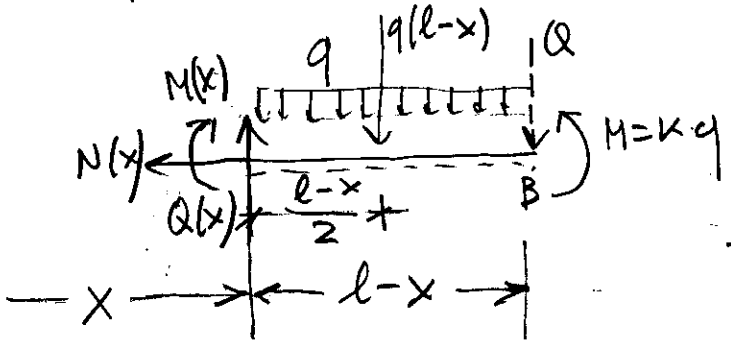
4ο Θέμα:



Εφαρμόζουμε και μία φανταστική κατακόρυφη συγκεντρωμένη δύναμη Q στο άκρο B.

2ο Θεώρημα Castigliano:

$$\delta_B = \left[\frac{1}{EJ}\int_0^l M(x)\frac{\partial M(x)}{\partial Q}dx\right]_{Q=0}$$



$$\Sigma(M_i)_x = 0 \text{ ή } -M(x) - \frac{l-x}{2}q(l-x) - (l-x)Q + \underset{kq}{M} = 0$$

$$\Rightarrow M(x) = -q\frac{(l-x)^2}{2} - Q(l-x) + k\cdot q$$

$$\frac{\partial M(x)}{\partial Q} = -(l-x)$$

Πρέπει $\delta_B = 0$ άρα πρέπει: $\left.\int_0^l M(x)\frac{\partial M(x)}{\partial Q}dx\right|_{Q=0} = 0$

$$\left.\int_0^l M(x)\frac{\partial M(x)}{\partial Q}dx\right|_{Q=0} = \int_0^l\left[q\frac{(l-x)^3}{2} + Q(l-x)^2 - kq(l-x)\right]dx = \begin{pmatrix} l-x=y \\ dx=-dy \end{pmatrix}$$

$$= \int_l^0\left(-\frac{qy^3}{2} - Qy^2 + kqy\right)dy = -\left[\frac{qy^4}{8}\right]_l^0 - \cancel{\left[Q\frac{y^3}{3}\right]_l^0}_{Q=0} + \left[kq\frac{y^2}{2}\right]_l^0 =$$

$$= \frac{ql^4}{8} - kq\frac{l^2}{2} = q\frac{l^2}{2}\left(\frac{l^2}{4} - k\right) = 0 \rightarrow$$

$$\boxed{k = \frac{l^2}{4}}$$