ΩΡΑ 15:00-17:30

ΜΕΡΟΣ Ι

Θέμα 1ο Α) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$\left(3x-y^2\right)dx+2xydy=0,\ \ y(1)=1$ Μονάδες 1

Β) Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης:

$y''-2y'+y=e^x\left(\sin x+x^{-2}\right)$ Μονάδες 1,5

Θέμα 2ο Α) (i) Με τη χρήση των δυναμοσειρών να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης: $\left(1-x^2\right)y''+2xy'+4y=0.$ Μονάδες 1,2

(ii) Να βρεθούν τα ιδιάζοντα σημεία της διαφορικής εξίσωσης: $(x+1)y''+xy'+\left(1-x^2\right)y=0.$ Να προσδιοριστούν αν είναι κανονικά ιδιάζοντα σημεία και να βρεθούν η δείκτρια εξίσωση και οι εκθέτες ιδιομορφίας. Μονάδες 1, 3

Β) Με την χρήση του μετασχηματισμού Laplace να λυθεί το πρόβλημα αρχικών συνθηκών:

$y''+4y=\begin{cases}\sin t,\ 0\le t\prec\pi\\ 0,\quad t\ge\pi\end{cases},\ \ y(0)=1,\ \ y'(0)=0.$ Μονάδες 1

ΜΕΡΟΣ ΙΙ

Θέμα 3ο Α) Να βρεθεί η ολόμορφη συνάρτηση $f:C\to C$ που ικανοποιεί
$\mathrm{Re}\,al\ f=u,\ f(0)=2$,όπου $u(x,y)=e^x\cos y+e^y\cos x+xy,\ (x,y)\in\mathbb{R}^2.$ Μονάδες 1.2

Β) Να βρείτε το $\max\left\{\left|z^2+z-1\right|:|z|\le 1\right\}$ καθώς και τα σημεία στα οποία το παραπάνω max λαμβάνεται. (*Υπόδ*: Αρχή Μεγίστου). Μονάδες 1.3

<u>Θέμα 4ο</u> Α) Δίνεται ο κύκλος $\gamma(t)=4e^{it},\ t\in[0,\ 2\pi]$. Να υπολογίσετε τα μιγαδικά ολοκληρώματα: $\oint\frac{e^z-1}{z\sin z}dz,\qquad \oint_\gamma z^3\cos(1/z)\,dz.$ Μονάδες 1.5

Β) Με χρήση αποκλειστικά Μιγαδικής Ανάλυσης, να δείξετε ότι
$\oint_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x^4}dx=\pi\, lm\left(ae^{i\alpha}\right),$ όπου $\alpha=\frac{1+i}{\sqrt{2}}.$
[Δίνεται ότι $\alpha^4=-1.$] Μονάδες 1.

Δίνονται οι μετασχηματισμοί Laplace: Αν

$$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\},\ \mathcal{L}\{e^{\alpha t}f(t)\}=F(s-a),\ s\succ\alpha,$$

$$\mathcal{L}\{t^n\}=\frac{n!}{s^{n+1}}n\geq 0,\ \mathcal{L}\{\cos at\}=\frac{s}{s^2+a^2},\ \mathcal{L}\{\sin at\}=\frac{a}{s^2+a^2},\ \mathcal{L}\{-t\,f(t)\}=\frac{dF(s)}{ds},$$

$$\mathcal{L}\{y^{(n)}(t)\}=s^n\mathcal{L}\{y(t)\}-s^{n-1}y(0)-\cdots-sy^{(n-2)}(0)-y^{(n-1)}(0)$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\,f(t)\}=e^{-st_0}f(t_0),(f\bullet g)(t)=\int_0^t f(u)\,g(t-u)\,du$$

$$\mathcal{L}\{H_a(t)\,f(t-a)\}=e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\},\ a\geq 0,\ \text{όπου}\ H_a(t)=\begin{cases}0,\ 0\leq t\prec a\\ 1,\qquad t\geq a\end{cases}$$

<u>ΘΑ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΣΕΤΕ ΤΟΥΛΑΧΙΣΤΟΝ 2 ΜΟΝΑΔΕΣ ΑΠΟ ΚΑΘΕ ΜΕΡΟΣ ΚΑΙ ΣΥΝΟΛΙΚΑ ΤΟΥΛΑΧΙΣΤΟΝ 5 ΜΟΝΑΔΕΣ</u>