ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ, Ε.Μ.Π. - 22/01/2019
"ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ- ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ"
ΑΡΙΣΤΑ=10 μονάδες, ΒΑΣΗ=5 μονάδες
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 h

- Οι φοιτητές του παλαιού προγράμματος σπουδών που χρωστούν ΜΟΝΟ το ένα αντικείμενο, πρέπει να ασχοληθούν ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ με τα θέματα του αντίστοιχου μέρους. (Για το άριστα, πρέπει να απαντηθούν ΟΛΑ τα θέματα).
- ΟΛΟΙ οι υπόλοιποι φοιτητές πρέπει:
  - Να επιλέξουν το ΠΟΛΥ 2 θέματα από ΚΑΘΕ μέρος.
  - Να συγκεντρώσουν ΤΟΥΛΑΧΙΣΤΟΝ 2 μονάδες από ΚΑΘΕ μέρος.

ΜΕΡΟΣ Α: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΘΕΜΑ 1. **(i)** Να υπολογίσετε τα όρια των ακολουθιών (a_n), (b_n), όπου

$$(0,7\mu.)\ a_n = \sqrt[n]{2^n + \frac{4^n}{n!}}, \qquad (0,8\mu.)\ b_1 = 1, \quad b_{n+1} = \frac{2b_n}{1+b_n^2}, \quad n \geq 1.$$

(ii)(1 μ.) Έστω (a_n) ακολουθία θετικών όρων με $\lim a_n = l \in [0,1)$. Να δείξετε ότι $\lim a_n^n = 0$. Αν $\lim a_n = 1$, εξακολουθεί να ισχύει το συμπέρασμα ; (Δικαιολογήστε την απάντησή σας.)

ΘΕΜΑ 2. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

(i)(0,7 μ.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{4^n \cdot n!}$ **(ii)(0,5 μ.)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\left(\frac{1}{n^4+1}\right)$

(iii)(0,8 μ.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$ **(iv)(0,5 μ.)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+2n^2+n}}{\sqrt[4]{n^9+1}}$

ΘΕΜΑ 3. **(i)(1 μ.)** Να υπολογίσετε το άθροισμα $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

(ii)(1 μ.) Να αναπτύξετε σε δυναμοσειρά γύρω από το 0 τη συνάρτηση $f(x) = e^{x^2} + x^2 \cos x$ και να υπολογίσετε την παράγωγο $f^{(10)}(0)$.

(iii)(0,5 μ.) Με χρήση του θεωρήματος Taylor, να δείξετε ότι

$$\left|\sin x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)\right| \leq \frac{|x|^7}{7!}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

ΘΕΜΑ 4. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

(i)(1 μ.) $\displaystyle\int \frac{\sin^4 x}{\cos x} dx$ **(ii)(0,7 μ.)** $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2+2x+10}\, dx$

(iii)(0,8 μ.) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\, dx$

<u>ΜΕΡΟΣ Β: ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ</u>

ΘΕΜΑ 1. (2,5 μονάδες)

(i) Δίνεται τετραγωνικός πίνακας A τάξης $n \times n$, τέτοιος ώστε να ισχύει: $A^2 + A - 7 \cdot I_n = 0.$ Ο πίνακας $A + I_n$ είναι αντιστρέψιμος; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (0,5 μον.)

(ii) Δίνεται ο επόμενος πίνακας Α τάξης 3×3. Αφού βρείτε το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο $X_A(\lambda)$, τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματά του, να υπολογίσετε άμεσα την ορίζουσά του $detA$ με τη βοήθεια του χαρακτηριστικού του πολυωνύμου $X_A(\lambda)$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}. \text{ (2 μον.)}$$

ΘΕΜΑ 2. (2,5 μονάδες)

(i) Θεωρούμε τους τετραγωνικούς πίνακες A, B τάξης $n \times n$. Αν ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος και ισχύει ότι $A + B = A \cdot B$, να δείξετε ότι ο Α είναι αντιστρέψιμος και ότι ισχύει: $A^{-1} + B^{-1} = I_n$. (0,5 μον.)

(ii) Να λυθεί το επόμενο σύστημα γραμμικών εξισώσεων, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α:

$$\begin{cases} x + y + az = a^2 \\ x + ay + z = a \\ ax + y + z = 1 \end{cases} \quad \text{(2 μον.)}$$

ΘΕΜΑ 3. (2,5 μονάδες)

(i) Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α τα διανύσματα

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ αποτελούν μία βάση του } R^3 \text{ ; (0,5 μον.)}$$

(ii) Για τις τιμές του α που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$. (1 μον.)

(iii) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού β για τις οποίες το διάνυσμα $\vec{t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \beta \end{bmatrix}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $\vec{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Στη συνέχεια, να προσδιορίσετε αυτόν τον γραμμικό συνδυασμό. (1 μον.)

ΘΕΜΑ 4. (2,5 μονάδες)

(i) Να γράψετε μία καρτεσιανή εξίσωση για το επίπεδο που περνάει από το σημείο $P_0(-2, 4, 5)$ και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{n} = (3, -1, 6)$. Να γράψετε την εξίσωση του επιπέδου στην κανονική της μορφή. Ποια είναι η απόσταση του σημείου $P_1(9, 7, -6)$ από το επίπεδο;

(ii) Δίνονται οι ευθείες:

$$(\varepsilon_1): \frac{x-3}{2} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-1}{1} \text{ και } (\varepsilon_2): \frac{x+2}{-4} = \frac{y-3}{8} = \frac{z-5}{-2}.$$

Να δείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι παράλληλες (και δεν ταυτίζονται). Να βρείτε την απόστασή των (ε_1) και (ε_2).