ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ, Ε.Μ.Π. - 04/09/2019
"ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ- ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ"
ΑΡΙΣΤΑ=10 μονάδες, ΒΑΣΗ=5 μονάδες
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 h

- Οι φοιτητές του παλαιού προγράμματος σπουδών που χρωστούν ΜΟΝΟ το ένα αντικείμενο, πρέπει να ασχοληθούν ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ με τα θέματα του αντίστοιχου μέρους. (Για το άριστα, πρέπει να απαντηθούν ΟΛΑ τα θέματα).

- ΟΛΟΙ οι υπόλοιποι φοιτητές πρέπει:
  – Να επιλέξουν το ΠΟΛΥ 2 θέματα από ΚΑΘΕ μέρος.
  – Να συγκεντρώσουν ΤΟΥΛΑΧΙΣΤΟΝ 2 μονάδες από ΚΑΘΕ μέρος.

ΜΕΡΟΣ Α: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΘΕΜΑ 1. **(i)** Να υπολογίσετε τα όρια των ακολουθιών (a_n), (b_n), όπου

$(0,7\mu.)$ $a_n = \dfrac{3^n - n^3 \cdot 2^n}{3^n + (-2)^n}$, $n \geq 1$ $\qquad$ $(0,8\mu.)$ $b_1 = 1$, $b_{n+1} = \dfrac{4}{4 - b_n}$, $n \geq 1$.

(ii)(1 μ.) Δίνονται ακολουθίες (x_n), (y_n) με $\lim(x_n \cdot y_n) = 1$, $\lim(x_n + y_n) = 2$.
Να δείξετε ότι: (α) $\lim(x_n - y_n) = 0$ (β) $\lim x_n = \lim y_n = 1$.

ΘΕΜΑ 2. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

(i)(0,7 μ.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$ $\qquad$ **(ii)(0,5 μ.)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

(iii)(0,8 μ.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right]$ $\qquad$ **(iv)(0,5 μ.)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+2}}{\sqrt[3]{n^7+1}}$

ΘΕΜΑ 3.(i)(1,3 μ.) Να αναπτύξετε σε δυναμοσειρά γύρω από το σημείο $a = 4$ τη συνάρτηση $f(x) = \ln(2x - 3)$, δίνοντας και το αντίστοιχο διάστημα σύγκλισης.

(ii) (1,2 μ.) Με χρήση του θεωρήματος Taylor, να δείξετε ότι

$$\sum_{k=0}^{4} \frac{x^k}{k!} - \frac{1}{120} \leq e^x \leq \sum_{k=0}^{4} \frac{x^k}{k!}, \quad \text{για κάθε} \quad x \in [-1, 0].$$

ΘΕΜΑ 4. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

(i)(1,25 μ.) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}dx$ $\qquad$ **(ii)(1,25 μ.)** $\displaystyle\int \frac{8x+5}{(x-1)(x^2+4x+8)}\,dx$

<u>ΜΕΡΟΣ Β: ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ</u>

ΘΕΜΑ 1. (2,5 μονάδες)

(i) **Δίνονται A, B δύο αντιστρέψιμοι πίνακες τάξης $n \times n$, τέτοιοι ώστε ο πίνακας $A + B^{-1}$ να είναι αντιστρέψιμος. Να δείξετε ότι ο πίνακας $A^{-1} + B$ είναι αντιστρέψιμος και ισχύει:**

$$(A^{-1} + B)^{-1} = A \cdot (A + B^{-1})^{-1} \cdot B^{-1} \qquad \text{(1 μον.)}$$

(ii) **Να λυθεί το επόμενο σύστημα γραμμικών εξισώσεων για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\alpha \in R$:**

$$\begin{cases} ax + (1-\alpha)y + (1-\alpha)z = a^2 \\ \alpha x + (1+a)y + (1+\alpha)z = \alpha - a^2 \\ x + y + z = 1 - \alpha \end{cases} \qquad \text{(1,5 μον.)}$$

ΘΕΜΑ 2. (2,5 μονάδες)

(i) **Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 3 \\ -2 & \beta & \alpha \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, τάξης 3×3, όπου $\alpha \in R$ και $\beta \in R$. Να βρείτε για ποιες τιμές των παραμέτρων α, β υπάρχει ο αντίστροφος του A και να τον υπολογίσετε. (0,5 μον.)**

(ii) **Δίνεται ο πίνακας $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, τάξης 3×3. Να βρείτε το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο $X_B(\lambda)$, τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματά του. Στη συνέχεια, να υπολογίσετε άμεσα την ορίζουσά του $detB$ με τη βοήθεια του χαρακτηριστικού του πολυωνύμου $X_B(\lambda)$. (2 μον.)**

ΘΕΜΑ 3. (2,5 μονάδες)

Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{a_4}$ του διανυσματικού χώρου R^4.

$$\overrightarrow{a_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \overrightarrow{a_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \overrightarrow{a_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \overrightarrow{a_4} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

(i) **Να εξετάσετε αν το σύνολο $A = \{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{a_4}\}$ αποτελεί μια βάση του διανυσματικού χώρου R^4. Αν ναι, να τεκμηριώσετε την απάντησή σας. Αν όχι, να βρείτε μια σχέση που συνδέει τα διανύσματα αυτά. (1,5 μον.)**

(ii) **Να προσδιορίσετε μία σχέση ανάμεσα στα στους πραγματικούς αριθμούς κ και λ έτσι ώστε το διάνυσμα $\vec{x} = (1, 1, \kappa, \lambda)^t$ να ανήκει στη γραμμική θήκη του A. (1 μον.)**

ΘΕΜΑ 4. (2,5 μονάδες)

(i) **Να γράψετε μία καρτεσιανή εξίσωση για το επίπεδο που περνάει από το σημείο $P_0(2, -4, 3)$ και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\overline{n} = (-1, 1, 5)$. Ποια είναι η απόσταση του σημείου $P_1(8, 6, 2)$ από το επίπεδο;**

(ii) **Δίνονται οι ευθείες:**

$$(\varepsilon_1): \frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+1}{5} \quad \text{και} \quad (\varepsilon_2): \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-6}{10}.$$

Να δείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι παράλληλες (και δεν ταυτίζονται). Να βρείτε την απόστασή των (ε_1) και (ε_2).