ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΠΗΓΩΝΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΟ ΕΤΟΣ 2018 -2019 -ΕΞΑΜΗΝΟ 3ο

ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ & ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΠΕΜΠΤΗ 07 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2019, ΩΡΑ 8:30-11.30

ΜΕΡΟΣ Ι

Θέμα 1ο **A)** Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$y' = -\frac{3x^2y+y^2}{2x^3+3xy} = 0, \; y(1) = -2$ Μονάδες 1

B) Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης:

$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}lnx + 8cos2x$ Μονάδες 1.5

Θέμα 2ο **A)** **(i)** Με την χρήση των δυναμοσειρών να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης: $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$. Μονάδες 1

(ii) Να δειχθεί ότι το $x_o = 0$ είναι κανονικό ιδιάζον σημείο της διαφορικής εξίσωσης: $x^2y'' + xy' + (x^2-1)y = 0$. Να βρεθεί η δείκτρια εξίσωση, οι εκθέτες ιδιομορφίας και η αναδρομική σχέση. Μονάδες 0.5

B) Με τη χρήση του μετασχηματισμού Laplace να λυθεί το πρόβλημα αρχικών συνθηκών:

$y'' + y = \begin{cases} sint, & 0 \le t < \pi \\ t-\pi, & t \ge \pi \end{cases}, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 0.$ Μονάδες 1

ΜΕΡΟΣ ΙΙ

Θέμα 4ο **A)** Να βρεθεί η ολόμορφη συνάρτηση $f: \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ που ικανοποιεί $Real\, f = u$, $f(0) = 1$, όπου $u(x,y) = 3x^2y - y^3 + e^{2y}\cos(2x) + xy, \; (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Μονάδες 1

B) Έστω $f: \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ ολόμορφη συνάρτηση με $|f(z)| \le |z|, \; \forall z \in \boldsymbol{C}$. Να δείξετε ότι:

(i) $\left|f^{(n)}(0)\right| \le \frac{n!}{R^{n-1,}}, \; \forall n \in \mathbb{N}, \; \forall R > 0.$ Μονάδες 0.7

(ii) $\exists\, \alpha \in \boldsymbol{C}: |a| \le 1, \; f(z) = az, \; \forall z \in \boldsymbol{C}.$ Μονάδες 0.8

Θέμα 5ο **A)** Δίνεται ο κύκλος $\gamma(t) = e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$. Να υπολογίσετε τα μιγαδικά ολοκληρώματα:

$\oint_\gamma \frac{\sin z}{z^2\,(e^z-1)}\, dz, \qquad \oint_\gamma z^4 \sin(1/z) dz.$ Μονάδες 1.5

B) Με χρήση αποκλειστικά Μιγαδικής Ανάλυσης, να δείξετε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^5 sinx}{1+x^6}\, dx = \frac{\pi}{3}\left[2Re\left(e^{ia}\right) + \frac{1}{e}\right], \text{ όπου } a = \frac{\sqrt{3}+i}{2}.$$

[Δίνεται ότι $a^6 = i^6 = -1$.] Μονάδες 1

Δίνονται οι μετασχηματισμοί Laplace: Αν $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a), s > a$,

$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}\; n \ge 0$, $\mathcal{L}\{cosat\} = \frac{s}{s^2+a^2}$, $\mathcal{L}\{sinat\} = \frac{a}{s^2+a^2}$, $\mathcal{L}\{-t\, f(t)\} = \frac{dF(s)}{ds}$,

$\mathcal{L}\{\delta(t-t_o)f(t)\} = e^{-st_o} f(t_o)$, $(f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du$

$\mathcal{L}\{H_a(t)f(t-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\}, a \ge 0, \; s > 0$, όπου $H_a(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < a \\ 1, & t \ge a \end{cases}$

ΘΑ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΣΕΤΕ ΤΟΥΛΑΧΙΣΤΟΝ 2 ΜΟΝΑΔΕΣ ΑΠΟ ΚΑΘΕ ΜΕΡΟΣ ΚΑΙ ΣΥΝΟΛΙΚΑ ΤΟΥΛΑΧΙΣΤΟΝ 5 ΜΟΝΑΔΕΣ