ΣΥΝΟΛΟ ΜΟΝΑΔΩΝ = 10, ΒΑΣΗ=5, ΔΙΑΡΚΕΙΑ= 3 h

Οι φοιτητές που χρωστούν και τα δύο αντικείμενα, πρέπει να συγκεντρώσουν ΤΟΥΛΑΧΙΣΤΟΝ 2 μονάδες από ΚΑΘΕ μέρος.

ΜΕΡΟΣ Α: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΘΕΜΑ 1. (α) (1 μ.) Να δείξετε ότι η ακολουθία (a_n) με $a_1=1,\ a_n+1=\sqrt{1+a_n}\quad n\geq 1$, συγκλίνει και να υπολογίσετε το $\lim\limits_n a_n$.

(β) (0,8 μ.) Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{2}{n}\right)^n$.

(γ) (0,7 μ.) Να αναπτύξετε τη συνάρτηση $f(x)=xe^{-x^2}$, $x\in\mathbb{R}$ σε δυναμοσειρά γύρω από το 0 και να υπολογίσετε την παράγωγο $f^{(7)}(0)$.

ΘΕΜΑ 2. (α) (1 μ.) Με χρήση του θεωρήματος Taylor, να δείξετε ότι $\left|\cos\left(x^2\right)-\left(1-\frac{x^4}{2!}+\frac{x^8}{4!}\right)\right|\leq\frac{x^{12}}{6!}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

(β) (0,7 μ.) Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int\frac{x+1}{x^2+4x+8}dx$.

(γ) (0,8 μ.) Να δείξετε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{\infty}\frac{\ln t}{t^{3/2}}dt$ συγκλίνει.

ΜΕΡΟΣ Β: ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΘΕΜΑ 3. Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}3 & -12 & 4\\ -1 & 0 & -2\\ -1 & 5 & -1\end{bmatrix}$

(α) (0,5 μ.) Να βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του Α και τις ιδιοτιμές του.

(β) (0,5 μ.) Με τη βοήθεια των αποτελεσμάτων που βρήκατε στο (α), μπορείτε να αποφασίσετε αν ο Α διαγωνοποιείται και αν αντιστρέφεται; (Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας).

(γ) (1,5 μ.) Αν ο Α διαγωνοποιείται, να βρείτε μια διαγωνοποίηση του Α. Αν ο Α αντιστρέφεται, να υπολογίσετε τις τιμές του A^{-1} χωρίς να υπολογίσετε το αντίστροφο του Α.

<u>ΘΕΜΑ 4.</u> (α) (i) (0, 5 μ.) Δίνεται πίνακας Α τύπου $4\,x\,4$ με $\det(A)=7$. Να υπολογίσετε τις ορίζουσες $\det(-A)$, $\det\left(2\bullet A^t\bullet A^{-1}\right)$, όπου A^t ο ανάστροφος του A.

(ii) (0,5 μ.) Να λυθεί το παρακάτω γραμμικό σύστημα, για τις διάφορες τιμές του

$$m\in\mathbb{R}:\begin{cases} x-y+z=7 \\ 2x+my-4z=m \\ x+y-z=1 \end{cases}$$

(β) (1,5 μ.) Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1):\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z+2}{1}$, $(\varepsilon_2):\dfrac{x-5}{-6}=\dfrac{y-2}{-4}=\dfrac{z+1}{-2}$.

Να δείξετε ότι οι (ε_1), (ε_2) είναι παράλληλες και να βρείτε την απόσταση τους.