Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών

Διδάσκοντες: Δημήτρης Φωτάκης, Δώρα Σούλιου

Ονοματεπώνυμο:.................................

Αρ. Μητρώου: ....

Εξάμηνο: ....

Θέση: ....

1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
Σ	

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ

Κανονική Εξέταση, Φεβρουάριος 2020

Διάρκεια εξέτασης: 2:30. Σύνολο μονάδων: 80

Δεν επιτρέπεται κινητό τηλέφωνο, αριθμομηχανή ή άλλη ηλεκτρονική συσκευή. Σε περίπτωση που έχετε μαζί σας κάτι από τα παραπάνω παρακαλούμε απενεργοποιήστε τα και κρύψτε τα. Η αποχώρηση είναι δυνατή μετά την παρέλευση τουλάχιστον 1 ώρας από την έναρξη.

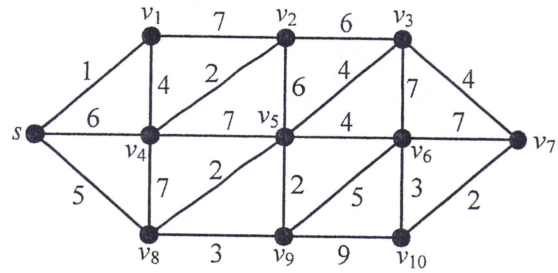
Θέμα 1. (12)

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως αληθείς (Α) ή ψευδείς (Ψ). Δεν απαιτείται αιτιολόγηση. Κάθε σωστή απάντηση παίρνει 1 μονάδα, κάθε λάθος απάντηση αφαιρεί 0.5 μονάδα (αρνητική βαθμολογία). Κενές ή άκυρες απαντήσεις δεν προσθέτουν ούτε αφαιρούν μονάδες. Για τις απαντήσεις σας, να υποθέσετε ότι **P** ≠ **NP**, αν αυτό χρειάζεται.

	Η αναδρομική σχέση $T(n) = 2T(n/2) + \sqrt{n}$, με $T(1) = \Theta(1)$, έχει λύση $T(n) = O(\sqrt{n}\log n)$.
	Η αναδρομική σχέση $T(n) = T(n/2) + T(n/3) + T(n/6) + n$, με $T(1) = \Theta(1)$, έχει λύση $T(n) = \Theta(n\log n)$.
	Η αναδρομική σχέση $T(n) = T(n/2) + T(n/3) + n^2$, με $T(1) = \Theta(1)$, έχει λύση $T(n) = \Theta(n^2)$.
	Ο χρόνος εκτέλεσης της CountingSort είναι πολυωνυμικός στο μέγεθος της εισόδου.
	Σε έναν αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού, είναι (ασυμπτωτικά) πιο αποδοτικό να υπολογίσουμε την τιμή της λύσης για κάθε υποπρόβλημα του χώρου καταστάσεων από το να χρησιμοποιήσουμε αναδρομή με απομνημόνευση (memorization).
	Ο χρόνος εκτέλεσης χειρότερης περίπτωσης ενός αλγόριθμου δυναμικού προγραμματισμού με μέγεθος χώρου καταστάσεων S είναι αναγκαστικά $\Omega(S)$.
	Έστω μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ στο οποίο εφαρμόζουμε BFS με αρχική κορυφή την s. Αν μια κορυφή u ανήκει στο k-οστό επίπεδο του BFS-δέντρου, κάθε $s-u$ μονοπάτι έχει μήκος ίσο με k.
	Το DFS σε ένα γράφημα με n κορυφές χρειάζεται χρόνο $\Theta(n^2)$ αν το γράφημα αναπαρίσταται με πίνακα γειτνίασης.
	Έστω μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, w)$ με θετικά μήκη w στις ακμές, και έστω s, t δύο κορυφές του G. Αν το συντομότερο $s-t$ μονοπάτι p είναι μοναδικό, τότε κάθε Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο του G περιέχει τουλάχιστον μία ακμή του p.
	Σε ένα s-t δίκτυο, αν μειώσουμε την χωρητικότητα μιας ακμής της μέγιστης τομής κατά k, τότε η μέγιστη ροή μειώνεται κατά k.
	Αν οι κλάσεις **P** και **NP** είναι διαφορετικές, τότε υπάρχουν προβλήματα που δεν ανήκουν στο **NP** και δεν είναι **NP**-πλήρη.
	Αν οι κλάσεις **P** και **NP** ταυτίζονται, τότε κάθε πρόβλημα στην κλάση **NP** είναι αναγκαστικά **NP**-πλήρες.

Θέμα 2. (10+6=16)

1. Στο διπλανό γράφημα, να υπολογίσετε ένα Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο χρησιμοποιώντας **(α)** τον αλγόριθμο του Prim με αρχική κορυφή την s, και **(β)** τον αλγόριθμο του Kruskal. Ποιο είναι το βάρος του Ελάχιστου Συνδετικού Δέντρου; Για κάθε αλγόριθμο, να αναφέρετε ποιες ακμές και με ποια σειρά προστίθενται στο Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο.



2. Θεωρούμε μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα $G(V, E, w)$ με θετικά βάρη w στις ακμές και ένα υποσύνολο κορυφών $L \subseteq V$. Θέλουμε να υπολογίσουμε ένα συνδετικό δέντρο του G με ελάχιστο συνολικό βάρος όπου όλες οι κορυφές του L είναι φύλλα (ή να διαπιστώσουμε ότι δεν υπάρχει τέτοιο συνδετικό δέντρο). Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο για αυτό το πρόβλημα. Ποια είναι η υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας;

Θέμα 3. (8)

Δίνονται $m \geq 2$ ταξινομημένοι πίνακες ακεραίων $A_1[1 \ldots n_1]$, $A_2[1 \ldots n_2]$, …, $A_m[1 \ldots n_m]$. Θέλουμε να υπολογίσουμε θέσεις i_1, i_2, …, i_m στους πίνακες A_1, A_2, …, A_m ώστε να ελαχιστοποιείται η διαφορά:

$$\max\{A_1[i_1], \ldots, A_m[i_m]\} - \min\{A_1[i_1], \ldots, A_m[i_m]\}$$

(με άλλα λόγια, θέλουμε να βρούμε ένα διάστημα ελάχιστου μήκους που περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο από κάθε πίνακα). Να διατυπώσετε αλγόριθμο με χρόνο εκτέλεσης $O((n_1 + \cdots + n_m)\log m)$ για αυτό το πρόβλημα. Να αιτιολογήσετε συνοπτικά την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγόριθμού σας. **Σημείωση:** Για το 50% της βαθμολογίας, αρκεί ο αλγόριθμός σας να έχει χρόνο εκτέλεσης $O((n_1 + \cdots + n_m)m)$.

Θέμα 4. (10+4=14)

Μια ακολουθία φυσικών (y_1, y_2, ..., y_k) ονομάζεται *κυματιστή* αν για κάθε τριάδα διαδοχικών στοιχείων y_i, y_{i+1}, y_{i+2}, είτε $y_i < y_{i+1} > y_{i+2}$, είτε $y_i > y_{i+1} < y_{i+2}$ (δηλ. αν η ακολουθία αυξάνει μεταξύ y_i και y_{i+1}, πρέπει να φθίνει μεταξύ y_{i+1} και y_{i+2}, και αντίστροφα). Π.χ., η ακολουθία (1, 20, 4, 9, 2) είναι κυματιστή, ενώ η (1, 10, 8, 6, 9, 2) δεν είναι (γιατί 10 > 8 > 6). Θεωρούμε μια ακολουθία φυσικών $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ και θέλουμε να υπολογίσουμε μια *κυματιστή υπακολουθία* της $\boldsymbol{x}$ με *μέγιστο* συνολικό μήκος. Π.χ., η μέγιστη κυματιστή υπακολουθία της (1, 10, 8, 6, 9, 2) είναι η (1, 10, 8, 9, 2).

α) Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει το μήκος της μέγιστης κυματιστής υπακολουθίας μιας δεδομένης ακολουθίας φυσικών $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ μήκους n. Να αιτιολογήσετε προσεκτικά την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

β) Εφόσον απαιτείται, να τροποποιήσετε τον αλγόριθμο του (α) ώστε να υπολογίζει μια μέγιστη κυματιστή υπακολουθία της $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (επιπλέον του μήκους της). Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του τροποποιημένου αλγόριθμου.

Θέμα 5. (8+7=15)

Σε αυτό το ερώτημα θεωρούμε ένα συνεκτικό κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, w)$ με n κορυφές, m ακμές, (μη αρνητικά) μήκη w στις ακμές, και αρχική κορυφή s. Συμβολίζουμε με $d(u, v)$ την απόσταση των κορυφών u και v στο G. Μια ακμή (u, v) ονομάζεται *κρίσιμη* αν υπάρχει κορυφή x τέτοια ώστε η αύξηση του μήκους $w(u, v)$ να προκαλεί αύξηση της απόστασης $d(s, x)$. Μια ακμή (u, v) ονομάζεται *σχεδόν κρίσιμη* αν υπάρχει κορυφή x τέτοια ώστε η μείωση του μήκους $w(u, v)$ να προκαλεί μείωση της απόστασης $d(s, x)$.

α) Να διατυπώσετε **(i)** μια (απλή) ικανή και αναγκαία συνθήκη για την κρισιμότητα μιας ακμής (u, v), και **(ii)** μια απλή ικανή και αναγκαία συνθήκη για την σχεδόν κρισιμότητα μιας ακμής (u, v). Να αποδείξετε ότι οι συνθήκες που διατυπώσατε είναι πράγματι ικανές και αναγκαίες. Να δείξετε ακόμη ότι κάθε ακμή που είναι κρίσιμη είναι επίσης σχεδόν κρίσιμη, και ότι το αντίστροφο μπορεί να μην ισχύει.

β) Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει όλες τις κρίσιμες και τις σχεδόν κρίσιμες ακμές ενός τέτοιου γραφήματος G (για δεδομένη αρχική κορυφή s). Να αιτιολογήσετε την ορθότητα του αλγορίθμου σας με βάση τις συνθήκες του (α). Ποια είναι η υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας;

Θέμα 6. (5+5+5=15)

Δεχόμενοι ότι $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$, ποια από τα παρακάτω προβλήματα είναι **NP**-πλήρη (ή **NP**-δύσκολα) και ποια όχι; Να αιτιολογήσετε κατάλληλα (και πλήρως) τους ισχυρισμούς σας.

α) Δίνεται κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, m, t)$, όπου κάθε ακμή e έχει ακέραιο κόστος διέλευσης $m(e) \geq 0$ και ακέραιο χρόνο διέλευσης $t(e) \geq 0$. Δίνονται ακόμη κορυφές $a, \beta \in V$ και ακέραιοι $M > 0$ και $T > 0$. Ζητείται να αποφανθούμε αν υπάρχει $a - \beta$ μονοπάτι με συνολικό κόστος διέλευσης το πολύ M και συνολικό χρόνο διέλευσης το πολύ T.

β) Δίνονται ακέραιος $B > 0$ και *πλήρες* γράφημα $G(V, E)$ με n κορυφές, όπου κάθε κορυφή v έχει ακέραιο βάρος $w(v) > 0$ και κάθε ακμή $e = \{u, v\}$ έχει βάρος $w(e) = w(u)w(v)$ (ίσο με το γινόμενο του βάρους των άκρων της). Ζητείται να αποφανθούμε αν υπάρχει τομή $(S, V \setminus S)$ του G τέτοια ώστε το συνολικό βάρος των ακμών που διασχίζουν την τομή να είναι τουλάχιστον B.

Υπενθυμίσεις: σε ένα *πλήρες* γράφημα όλες οι κορυφές συνδέονται, ανά δύο, με ακμή. Μια ακμή *διασχίζει* μια τομή $(S, V \setminus S)$ αν το ένα άκρο της βρίσκεται στο S και το άλλο στο $V \setminus S$.

γ) Δίνονται μια συλλογή $\{ S_1, \ldots, S_m \}$ υποσυνόλων ενός σύμπαντος U με n στοιχεία, και φυσικός k, με $2 \leq k \leq m$. Ζητείται να αποφανθούμε αν υπάρχουν τουλάχιστον k υποσύνολα στη συλλογή που είναι, ανά δύο, ξένα μεταξύ τους.